

INSTITUTUL DE ARHITECTURA
„ION MINCU” BUCURESTI
CATEDRA: STIINTE TEHNICE

**T E O R I A
STRUCTURILOR**

ANUL III SI IV
PRELEGERI SELECTATE
1978 1979

PROF. ING. AL. CISMIGIU

76107/76548

CONTINUT

A. Solicitări

1. Încovoierea pură a materialelor izorezistente (recapitulare)
2. Solicitarea de încovoiere pură a secțiunilor din BA
3. Încovoierea cu forță tăietoare
4. Compresiune cu încovoiere
5. Răsucirea elementelor de BA

B. Extrapolări de la grinda lungă la grinda perete și la placă plană.

1. Grinzi lungi
2. Grinzi pereți
3. Consola triunghiulară acționată de o încărcare triunghiulară.
4. Placă pătrată și dreptunghiulară. Tabele.

C. Compunerea structurilor etajate

1. Complexe structurale
2. Principalele capitole ale proiectării structurilor etajate
3. Structuri în cadre pure.
4. Structuri diafragmate.
5. Structuri mixte.

D. Ruperea materiei solide și exploatarea materialelor.

1. Teoria Coulomb - Mohr - Caquot.
2. Folosirea intensivă a oțelului și betonului

E. Betonul precomprimat material al structurilor arhitecturale

1. Fundamente
2. Grinzi static determinate din BP

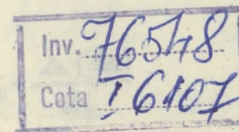
3. Elemente despre pretensionarea structurilor static nedeterminate.

4. Atributele BP

5. Ziduri de sprijin. Rezervoare

F. Elemente de dinamică.

1. Analiza cazurilor 2-6 de vibrație
2. Exemple.

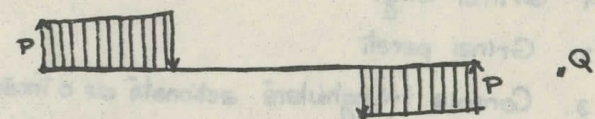
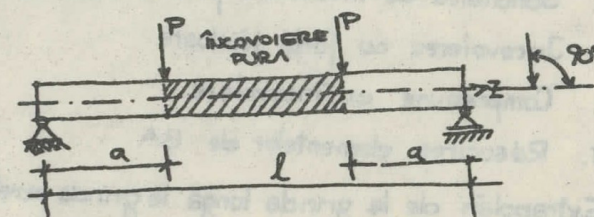


CAPITOL : A SOLICITARI

1. Încovoierea pură a materialelor izorezistente (recapitulare)
2. Solicitarea de încovoiere pură a secțiunilor din BA
3. Încovoierea cu forță tăietoare.
4. Compresiune cu încovoiere.
5. Răsucirea elementelor de structură din BA

1. ÎNCOVOIEREA PURĂ

ÎNCOVOIEREA (i) ESTE UNA DINTRE CELE MAI FRECVENTE SOLICITARI CARE INTERVIN ÎN CADRUL STRUCTURILOR; EA APARE ORI DE CÎTE ORI ELEMENTELE DE STRUCTURA SÎNT ÎNCARCATE CU FORTE NORMALE PE AXA LOR GEOMETRICA ($\perp$)



DIN TEORIA DIAGRAMELOR DE "EFORTURI SECTIONALE" SE ȘTIE CĂ ÎN ACEST CAZ AU NAȘTERE DOUA EFECTE ÎNSEPARABILE CARE SOLICITA ÎN MOD DIFERIT MATERIALUL ELEMENTULUI DE STRUCTURĂ :

- a. - UN EFECT DE "FLEXIUNE" EXPRIMAT PRIN VALOAREA MOMENTULUI ÎNCOVOIETOR "M"
- b. - UN EFECT DE "FORFECARE (TĂIERE)" EXPRIMAT PRIN VALOAREA FORTEI TĂietoARE "Q"

SE ȘTIE DEASEMENA CĂ ÎNTRE CELE DOUA FUNCȚII ALE EFORTURILOR SECTIONALE [$M(x)$ și $Q(x)$] EXISTA O LEGĂTURĂ CĂ DE LA FUNCȚIE LA DERIVATĂ :

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = M'(x)$$

-5-
 IN CONSECINTA, EFECTUL DE FLEXIUNE POATE FI ISOLAT SI STUDIAT SEPARAT NUMAI PE PORTIUNILE DE DIAGRAMA M-Q IN CARE $Q=0$ (FIG.1, PORTIUNEA BC); IN MAJORITATEA CAZURILOR AVEM $M \neq 0$ SI $Q \neq 0$, DECI UN CAZ DE INCOVOIERE CU FORTA TANGENTIE.

- METODA DE STUDIU

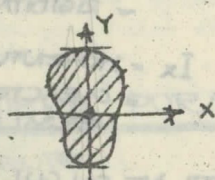
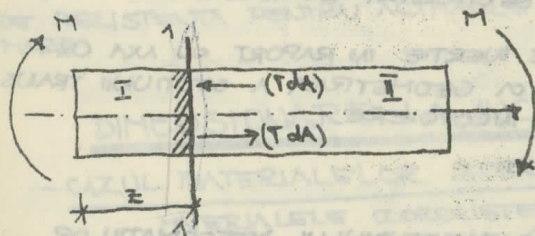
PENTRU STUDIUL COMPLET AL IP. VOM APELA LA O METODOLOGIE CARE SE REGASESTE IN ACEEASI SUCCESIUNE ATIT IN CAZUL UNOR PROBLEME SIMPLE CA INTINDEREA AXIALA RASUCIREA PURA, ETC. CIT SI LA CELE MAI COMPLEXE PROBLEME ALE TEORIEI ELASTICITATII, TENSIUNEA PLANA (TP), PLACA PLANA (PP), PLACA CURBA ELASTICITATII, ACEASTA METODOLOGIE COMPORTA URMATOARELE FAZE:

- FAZA (S) - STUDIUL STATIC (ECHILIBRUL)
- FAZA (G) - STUDIUL GEOMETRIC (GEOMETRIA DEFORMATILOR)
- FAZA (F) - STUDIUL FIZIC (FIZICA DEFORMATILOR)
- FAZA (F+G) - SINTEZA FIZICA - GEOMETRICA
- FAZA (F+G)+S - SINTEZA TOTALA, ECUATII DIFFERENTIALE, RELATII OPERATIVE DE CALCUL

IN CELE CE URMEAZA ACEASTA SUCCESIUNE VA FI APLICATA LA SOLICITAREA DE INCOVOIERE PURA.

- STUDIUL STATIC (S)

SE VA O BARA LUNGA CU SECTIUNEA TRANSVERSALA SIMETRICA IN RAPORT CU AXA OY. MOMENTUL INCOVOIETOR ACTIUNEAZA IN PLANUL ZOY. BARA SE DEFORMEAZA IN PLANUL DE ACTIUNE AL MOMENTULUI INCOVOIETOR M.



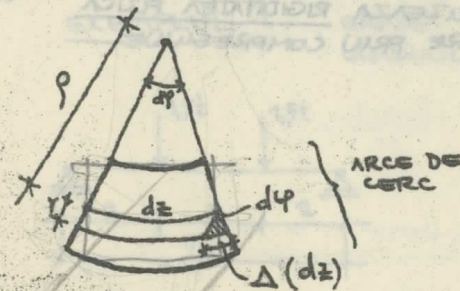
PENTRU A STABILI O LEGATURA STATICA INTRE FORTELE INTERIOARE SI ACTIUNEA EXTERIOARA SE STUDIAZ ECHILIBRUL FRAGMENTULUI I DEFINIT DE SECTIUNEA "1-1". FORTELE INTERIOARE CARE AU NASTERE IN SECTIUNEA "1-1" SINT DIN CATEGORIA (TdA) - FORTE NORMALE PE SECTIUNE, SINGURELE CARE POT DA NASTERE UNUI CUPLU INTERIOR DE MOMENT M;

- (1) $\sum_A (TdA) = 0$ [FORTELE INTERIOARE NU AU REZULTANTA]
- (2) $\sum_A (TdA) \cdot X = 0$ [FORTELE INTERIOARE NU DAU MOMENT IN RAPORT CU AXA OY]
- (3) $\sum_A (TdA) \cdot Y = 0$ [FORTELE INTERIOARE ECHILIBREAZA MOMENTUL CUPLULUI EXTERIOR]

-6-
 ACESTE RELATII NU POT FI OPERATE DEOARECE NU ESTE CUNOSCUTA LEGEA DE VARIATIE A EFORTULUI INTAR Y.

- STUDIUL GEOMETRIC (G)

SUB ACTIUNEA MOMENTELOR M, BARA SE INCURBEAZA DUPA UN ARC DE CERC (INCOVOIERE CIRCULARA) FIECARE ELEMENT DE BARA "dz" PARTICIPA LA DEFORMAREA DE ANSAMBLU (FIG.3)



O PARTE DIN FIBRE (DELA PARTEA SUPERIOARA) SE SCURTEAZA AR ALTELE SE ALUNGESC (DELA PARTEA INFERIOARA). EXISTA O FIBRA CARE NICI NU SE ALUNGESTE NICI NU SE SCURTEAZA; ACEASTA ESTE FIBRA NEUTRA.

FIECARE FIBRA SITUATA LA COTA Y SE VA ALUNGI SAU SCURTA CU CANTITATEA $\Delta(dz)$. DEFORMATA SPECIFICI ϵ_z SE VA OBTINE LA FEL CA LA INTINDERE - COMPRESIUNE AXIALA:

$$\epsilon_z = \frac{\Delta(dz)}{dz}$$

DIN ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR CURBILINI REZULTA:

$$\frac{\Delta(dz)}{y} = \frac{dz}{\rho} \quad ; \quad \frac{\Delta(dz)}{dz} = \epsilon_z = \frac{y}{\rho}$$

$$\epsilon_z = \left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot y = K y \quad (4)$$

DEFORMATIILE SPECIFICE SINT PROPORZIONALE CU DISTANTA DE LA FIBRA NEUTRA (Y). ACEASTA ESTE O CONSECINTA DIRECTA A DEFORMARII CIRCULARE CARE ASIGURA ORTOGONALITATEA RAZELOR SI A CIRCUMFERINTELOR. CU ALTE CUVINTE, IN CAZUL INCOVOIERII PURE SECTIUNILE PLANE SI NORMALE PE AXA BAREI, OZ, INAINTE DE DEFORMARE AU RAMAS PLANE SI NORMALE SI DUPA DEFORMARE. CONSERVAREA PLANITATII SECTIUNILOR ESTE CUNOSCUTA IN "TEORIA STRUCTURILOR" CA FIIND, IPOTEZA LUI BERNOULLI. IN CAZUL DE FATA O ASTEEL DE IPOTEZA NU ESTE NECESARA.

- STUDIUL FIZIC (F)

SE ADMITE CA BARA ESTE REALIZATA DINTR-UN MATERIAL LINAR-ELASTIC. CONFORM LEGII LUI HOOKE ACEASTA INSEAMUNA PROPORTIONALITATEA DIRECTA INTRE CAUZA ρ EFECT:

$$\tau_z = E \cdot \epsilon_z \quad (f)$$

IN ACEASTA RELATIE, E ESTE MODULUL DE ELASTICITATE AL MATERIALULUI DIN CARE ESTE REALIZATA BARA. ACEASTA CONSTANTA A FIECARUI MATERIAL IN PARTE CARACTERIZEAZA RIGIDITATEA FIZICA LA ALUNGIRE PRIN INTINDERE SAU SCURTARE PRIN COMPRESIUNE.

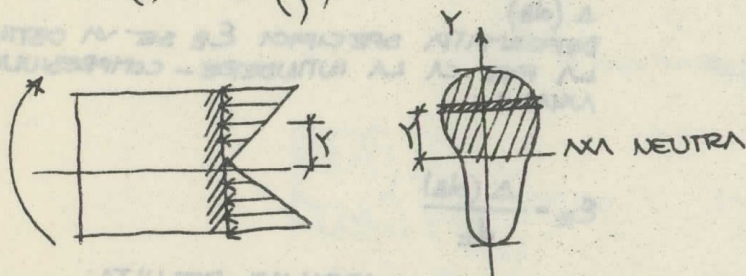
- SINTEZA (G+F)

$$\epsilon_z = \left(\frac{1}{\rho}\right) Y \dots \dots \dots \text{DIN (4)}$$

$$\epsilon_z = \frac{\tau_z}{E} \dots \dots \dots \text{DIN (f)}$$

ELIMININD ϵ_z DIN (4) SI (f) SE OBTINE LEGEA ANALITICA DE VARIATIE A EFORTURILOR τ PE INALTIMEA SECTIUNII

$$(6) \quad \tau_z = \left(\frac{E}{\rho}\right) \cdot Y = \text{LEGE LINIARA}$$



- SINTEZA (G+F)+S

SE INTRODUCHE FUNCTIA EFORTULUI τ_z IN CELE TREI ECUA-TII DE ECHILIBRU :

a. DIN ECUATIA (1) SE OBTINE,

$$\iint_A \tau(dA) = \left(\frac{E}{\rho}\right) \iint_A Y dA = \left(\frac{E}{\rho}\right) \cdot S_x = 0 ; \quad S_x = 0$$

S_x = MOMENTUL STATIC AL INTREGII SECTIUNII IN RAPORT CU AXA Ox .

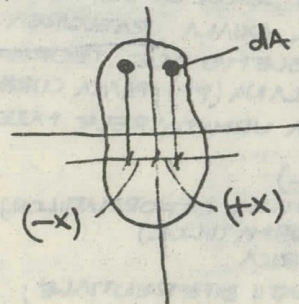
DE AICI REZULTA O CONCLUZIE IMPORTANTA SI NUUNE CA AXA NEUTRA, RESPECTIV AXA Ox , ESTE AXA CENTRALA (O AXA CARE TRECE PRIN CENTRUL DE GREVATE AL SECTIUNII)

b. DIN ECUATIA (2) SE OBTINE :

$$\iint_A (\tau dA) \cdot X = \left(\frac{E}{\rho}\right) \iint_A XY dA = \frac{E}{\rho} \cdot \overset{\circ}{I}_{xy} = 0$$

$$E \neq 0, \quad \frac{1}{\rho} \neq 0, \quad \text{REZULTA CA } \overset{\circ}{I}_{xy} = 0$$

$\overset{\circ}{I}_{xy}$ ESTE MOMENTUL DE INERTIE CENTRIFUGAL AL SECTIUNII IN RAPORT CU SISTEMUL DE AXE XOY . SECTIUNEA FIIND SIMETRICA IN RAPORT CU AXA OY ACEASTA CONDITIE ESTE SATISFACTA AUTOMAT:



LA FIECARE ARIE dA DEFINITA DE $(+x)$ CORESPUNDE UNA DEFINITA DE $(-x)$

c. DIN ECUATIA (3) SE OBTINE :

$$\iint_A (\tau dA) \cdot Y = \left(\frac{E}{\rho}\right) \iint_A Y^2 dA = \frac{E}{\rho} \cdot I_x = M$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E I_x} \quad (7)$$

$E I_x$ = RIGIDITATEA FIZICA $\times$ RIGIDITATEA GEOMETRICALA =
= RIGIDITATEA SECTIONALA LA INCOVOIERE

I_x = MOMENTUL DE INERTIE IN RAPORT CU AXA Ox =
= CARACTERISTICA GEOMETRICALA A SECTIUNII TRANS-VERSALA LA INCOVOIERE.

RELATII DE CALCUL

RELATIA (7) STA LA BAZA STUDIULUI DEFORMATIILOR BARELOR INCOVOATE; IN CAZUL INCOVOIERII PURE $\rho = \frac{E I_x}{M} = \text{ct.} =$
= AXA BAREI SE DEFORMEAZA DUPA UN ARC DE CERC.

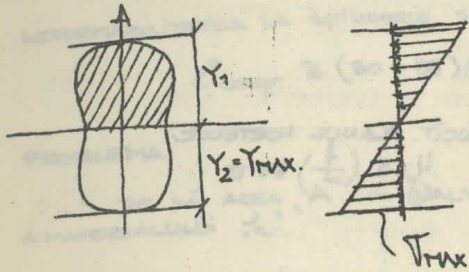
DIN RELATIILE (6) SI (7) SE OBTINE :

$$\tau_z = \frac{M}{I_x} \cdot Y = \text{FORMULA LUI NAVIER}$$

$\tau_z = k' \cdot Y$ = EFORTUL ESTE PROPORTIONAL CU DISTANTA DE LA PUNCTUL CONSIDERAT PINA LA AXA NEUTRA.

-9-

VALOAREA MAXIMA A EFORTULUI τ , τ_{max} , A NASTERE IN FIBRELE (SAU PUNCTELE) CELE MAI INDEPARTATE DE AXA NEUTRA



$$\tau_{max} = \frac{M}{I_x} \times Y_{max} =$$

$$= \frac{M}{\left(\frac{I_x}{Y_{max}}\right)} = \frac{M}{W_x}$$

$$W_x = \frac{I_x}{Y_{max}}$$

IN CAZUL UNEI SECTIUNI SIMETRICE $Y_1 = Y_2 = \frac{h}{2}$

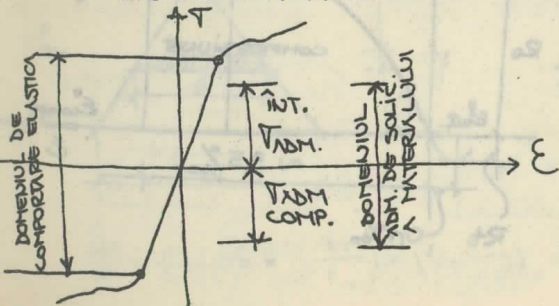
$$\tau_{max} = \frac{M}{I_x} \cdot \left(\frac{h}{2}\right) = \frac{M}{\left(\frac{I_x}{\frac{h}{2}}\right)} = \frac{M}{W}$$

$W = \frac{I_x}{Y_{max}}$ ESTE O NOUA CARACTERISTICA GEOMETRICA A INCOVOIERII CUNOSCUTA CA "MODULUL DE REZISTENTA" - MODULUL DE REZISTENTA ESTE O CARACTERISTICA FUNDAMENTALA A SECTIUNII. CU CIT LA O ARIE DATA $A(\text{cm}^2)$ SE OBTINE UN MODUL DE REZISTENTA $W(\text{cm}^3)$ MAI MARE, CU ATIT τ_{max} VA FI MAI MIC IAR REZERVA DE REZISTENTA PENTRU ACTIUNILE EXTERIOARE VA FI MAI MARE.

DIMENSIONARE LA INCOVOIERE PURA

- CAZUL MATERIALELOR IZOREZISTENTE

MATERIALELE IZOREZISTENTE POSEA TEORETIC LA ACEEASI REZISTENTA LA INTINDERE SI COMPRESIUNE. DIAGRAMA CARACTERISTICA A ACESTOR MATERIALE ESTE "SIMETRICA".



CONDITII DE IZOREZISTENTA:

$$\tau_{E}^{INT.} = \tau_{E}^{COMP.}$$

$$\tau_{ADM.}^{INT.} = \tau_{ADM.}^{COMP.}$$

-10-

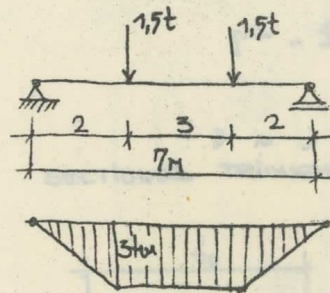
CONDITIA DE REZISTENTA DIN CARE REZULTA DIMENSIONILE ELEMENTELOR INCOVOIATE SE SCRIE ASTFEL:

$$W_{NECESAR} \geq \frac{M}{\tau_{ADM.}}$$

$$\tau_{ADM.} = 1400 - 1600 \text{ Kg/cm}^2 \text{ PT. OTEL MOLE}$$

$$\tau_{ADM.} \approx 100 \text{ Kg/cm}^2 \text{ PT. LEMN}$$

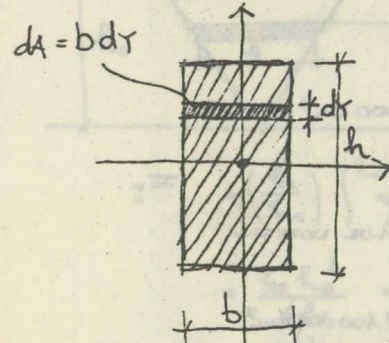
EXEMPLUL 1. GRINDA DE LEMN CU SECTIUNEA DREPT-UNGHULARA -



$$\tau_{ADM} = 100 \text{ Kg/cm}^2$$

$$M = 3,0 \text{ tm} = 3 \times 10^5 \text{ Kg cm}$$

- CARACTERISTICILE GEOMETRICE ALE SECTIUNILOR DREPTUNGHULARE



ARIA:

$$A^{\square} = b \times h$$

MOMENTUL DE INERTIE IN RAPORT CU OX:

$$I_x^{\square} = \iint_A y^2 dA = \iint_A b y^2 dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy =$$

$$= 2b \int_0^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = 2b \left| \frac{y^3}{3} \right|_0^{+\frac{h}{2}} = \frac{2b}{3} \times \frac{h^3}{8} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x^{\square} = \frac{bh^3}{12}$$

- MOMENTUL DE INERTIE 'IN RAPORT CU AXA CY.

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

- MODULUL DE REZISTENȚĂ

$$W_x = \frac{bh^2}{6} \quad W_y = \frac{hb^2}{6}$$

- CONDITIA DE REZISTENȚĂ

$$(W_x)_{necesar} > \frac{M}{\sigma_{adm}} = \frac{300.000}{100} = 3000$$

$$\frac{bh^2}{6} > 3000 \quad bh^2 > 18.000$$

- SE ACHITE UN RAPORT CONVENABIL DINTRE h si b.:

$$\frac{h}{b} = 2 > 1 \quad b = \frac{h}{2}$$

$$bh^2 = \frac{h^3}{2} > 18.000 \quad h^3 > 36.000$$

$$h^3 > 36.000$$

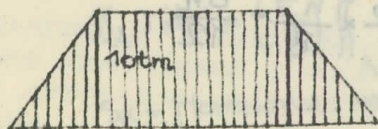
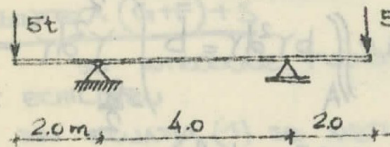
- SE ALEGE SECȚIUNEA:

$$A = 18 \times 32$$

$$(W_x)_{efectiv} = \frac{18 \times 32^2}{6} = 3072 > 3000 \text{ cm}^3$$

EXEMPLUL 2

GRINDĂ METALICĂ LAMINATĂ CU PROFILUL NORMAL
IN, J' (DUBLU, T')



$$\sigma_{adm} = 1.400 \text{ kg/cm}^2$$

$$M = 5 \times 2 = 10 \text{ tm.}$$

$$= 1.000.000 \text{ kgcm}$$

$$W_{nec} > \frac{1.000.000}{1.400} > 714 \text{ cm}^3$$

PEUTRU ACEASTĂ VALOARE CORESPONDE
UN PROFIL NORMAL CU $h = 30 \text{ cm}$.
(NP J30) CU $W_x = 653 \text{ cm}^3$ SAU
(NP J32) CU $W_x = 782 \text{ cm}^3$.

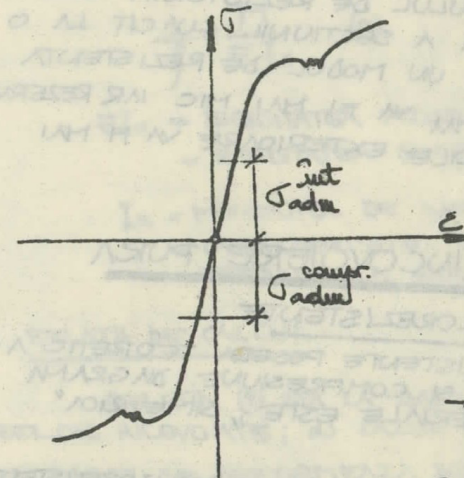
DIN TABELA CU PROFILE NORMALE, I' LAMINATE IN
TARA NOASTRA SE VEDE CĂ:

$$\frac{W_x}{W_y} = 8 \div 10 \gg 1$$

FOLOSIREA PROFILULUI ASTFEL ÎNCÎT PLANUL FORTELOR
EXTERIOARE SĂ COINCIDĂ CU PLANUL $yos (\frac{1}{2})$ ESTE
INTUITIVĂ ȘI FIREASCĂ

DIN AMEELE EXEMPLE SE REMARCĂ:
'ÎMPRĂȘTIEREA' MATERIALULUI ÎN RAPORT CU PLANUL FORTELOR
(ȘI A CUPLURILOR) EXTERIOARE ESTE FUNDAMENTALĂ.

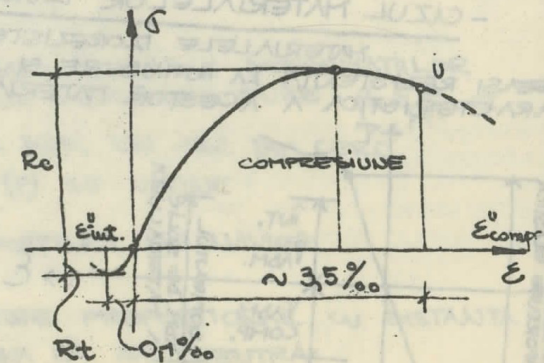
EXPLOATAREA MATERIALELOR IZOREZISTENTE LA ÎNCOVUIERE PURA



UN EXEMPLU DE MATERIAL
IZOREZISTENT (SIMETRIC) - OTELUL
SIMETRIA SE REFERĂ ATÎT
LA REZISTENȚĂ (σ) CÎT ȘI LA
DEFORMABILITATE (ϵ)
LA UN MATERIAL IZOREZISTENT,
REZISTENȚA ADMISIBILĂ LA
ÎNTINDERE ȘI COMPRESIUNE
ESTE ACEEAȘI

UN EXEMPLU DE MATERIAL
NESIMETRIC - BETONUL
NESIMETRIA SE REFERĂ ATÎT LA
REZISTENȚA LA ÎNTINDERE ȘI
COMPRESIUNE

$$(R_t < \frac{1}{10} R_o) \text{ cît și la.}$$

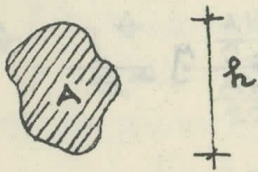


DEFORMABILITATEA LA ÎNTINDERE ȘI COMPRESIUNE:

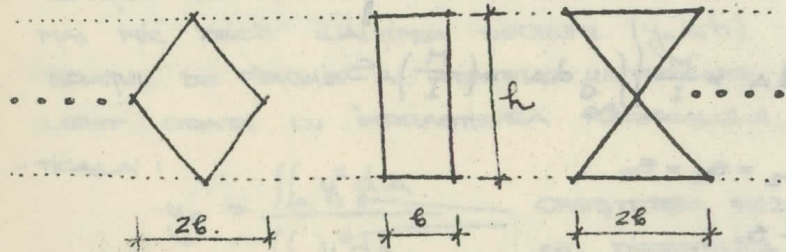
$$\epsilon_{\text{comp.}} \approx (30 \div 35) \epsilon_{\text{înt.}}$$

PROBLEMA.

- SE DĂ ARIA, A' ȘI ÎNĂLȚIMEA DE ÎMPRĂȘTIERE A MATERIALULUI h' .



SA SE STUDIEZE EFICIENȚA ÎMPRĂȘTIERII MATERIALULUI ÎN SECȚIUNE CONSIDERÂND TREI CAZURI DE REFERINȚĂ, SIMPLE:



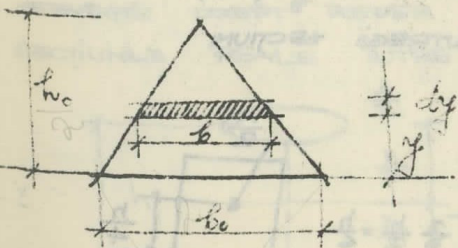
DISTRIBUȚIE NEUNIFORMĂ CU CONCENTRARE ÎN PARTEA CENTRALĂ.

$$A = b \times h$$

DISTRIBUȚIE UNIFORMĂ A MATERIALULUI PE ÎNĂLȚIME

DISTRIBUȚIE NEUNIFORMĂ CU CONCENTRARE ȘI PE PERIFERIA ÎNĂLȚIMII h'

SECȚIUNEA TRIUNGHULARĂ DE TIP Δ



$$dA = b dy$$

$$\frac{b}{b_0} = \frac{h_0 - y}{h_0}$$

$$b_0 = \frac{b}{h} \times (h_0 - y)$$

76548

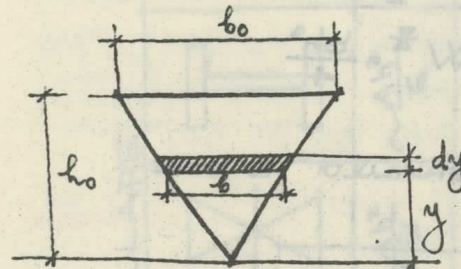
$$dA = \left(\frac{b_0}{h_0}\right) (h_0 - y) dy$$

$$I^{\Delta} = \iint y^2 dA = \left(\frac{b_0}{h_0}\right) \int_0^{h_0} (h_0 - y) y^2 dy =$$

$$= \left(\frac{b_0}{h_0}\right) \left[h_0 \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^{h_0} = \left(\frac{b_0}{h_0}\right) \left[\frac{h_0^4}{3} - \frac{h_0^4}{4} \right] = \frac{b_0 h_0^3}{12}$$

$$I^{\Delta} = \frac{b_0 h_0^3}{12}$$

SECȚIUNEA TRIUNGHULARĂ DE TIP ∇



$$\frac{b}{b_0} = \frac{y}{h_0}$$

$$b = \left(\frac{b_0}{h_0}\right) y$$

$$dA = b dy = \left(\frac{b_0}{h_0}\right) y dy$$

$$I^{\nabla} = \left(\frac{b_0}{h_0}\right) \int_0^{h_0} y^3 dy = \left(\frac{b_0}{h_0}\right) \times \frac{y^4}{4} \Big|_0^{h_0} =$$

$$= \frac{b_0 h_0^4}{4 h_0} = \frac{b_0 h_0^3}{4}$$

$$I^{\nabla} = \frac{b_0 h_0^3}{4}$$

RECAPITULARE

SECȚIUNEA	A	I_x	W_x
	bh	$\frac{bh^3}{8} = \frac{Ah^2}{8}$	$\frac{bh^2}{4} = \frac{Ah}{4}$
	bh	$\frac{bh^3}{12} = \frac{Ah^2}{12}$	$\frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6}$
	bh	$\frac{bh^3}{24} = \frac{Ah^2}{24}$	$\frac{bh^2}{12} = \frac{Ah}{12}$

VALORILE I_x SI W_x AU FOST OBTINUTE ASTFEL:

$$I_{\diamond} = 2 I^A = \frac{b_0 h_0^3}{6}$$

$$I_{\times} = 2 I^{\Sigma} = \frac{b_0 h_0^3}{2}$$

PARTICULARIZARE: $h_0 = \frac{h}{2}$; $b_0 = 2b$

$$I_{\diamond} = \frac{(2b)(\frac{h}{2})^3}{6} = \frac{bh^3}{24}; W_{\diamond} = \frac{bh^2}{12}$$

$$Y_{max} = \frac{h}{2}$$

$$I_{\times} = \frac{(2b)(\frac{h}{2})^3}{2} = \frac{bh^3}{8}; W_{\times} = \frac{bh^2}{4}$$

EFICIENȚA DISTRIBUȚIEI MATERIALULUI ÎN CELE DOUA SECȚIUNI:

$$\frac{I_{\times}}{I_{\diamond}} = 3$$

$$\frac{W_{\times}}{W_{\diamond}} = 3$$

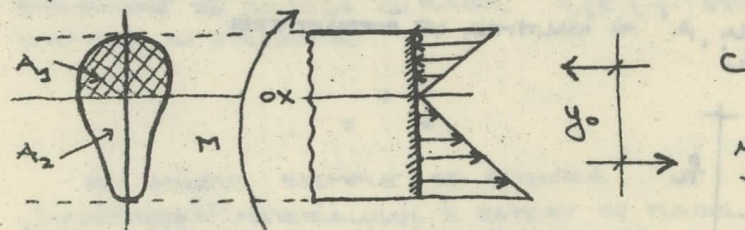
CRITERIILE PROIECTĂRII SECȚIUNILOR DIN MATERIALE IZOREZISTENTE LA ÎNCOVIERE

CRITERIUL 1 BRATUL DE PÎRGHIE AL PORTELOR INTERIOARE (Y_0)

CRITERIUL 2 RANDAMENTUL SECȚIUNII (η)

CRITERIUL BRATULUI DE PÎRGHIE AL PORTELOR INTERIOARE (Y_0)

BRATUL DE PÎRGHIE AL PORTELOR INTERIOARE ESTE BRATUL CUPLULUI INTERIOR.



$$C = \iint_{A_1} \sigma dA = \frac{M}{I} \iint_{A_1} y dA = \left(\frac{M}{I}\right) S_1$$

$$\parallel$$

$$Y = \iint_{A_2} \sigma dA = \frac{M}{I} \iint_{A_2} y dA = \left(\frac{M}{I}\right) S_2$$

$$S_1 = S_2 = S_0$$

$$C = Y = \frac{M}{I} S_0$$

$$C \times Y_0 = M$$

$$\parallel \parallel \Rightarrow Y_0 = \frac{I}{S_0}$$

S_0 = MOMENTUL STATIC ÎN RAPORT CU AXA Ox A PORȚIUNII COMPRESATE (A_1) SAU ÎNTINSE (A_2)

I = MOMENTUL DE INERTIE AL ÎNTREGII SECȚIUNI

$$S_0^{\nabla} = \left(\frac{A}{2}\right) \times \frac{h}{3} = \frac{Ah}{6}$$

$$S_0^{\Delta} = \left(\frac{A}{2}\right) \left(\frac{h}{3}\right) = \frac{Ah}{6}$$

$$S_0^{\square} = \left(\frac{A}{2}\right) \times \frac{h}{4} = \frac{Ah}{8}$$

BRATUL DE PIRGHIE PENTRU CELE TREI SECȚIUNI LUATE ÎN STUDIU

$$y_0^{\times} = \frac{I_{\times}}{S_{\times}} = \frac{\frac{Ah^2}{8}}{\frac{Ah}{6}} = \frac{3}{4}h$$

$$y_0^{\Pi} = \frac{I_{\Pi}}{S_{\Pi}} = \frac{\frac{Ah^2}{12}}{\frac{Ah}{8}} = \frac{2}{3}h$$

$$y_0^{\diamond} = \frac{I_{\diamond}}{S_{\diamond}} = \frac{\frac{Ah^2}{24}}{\frac{Ah}{12}} = \frac{1}{2}h$$

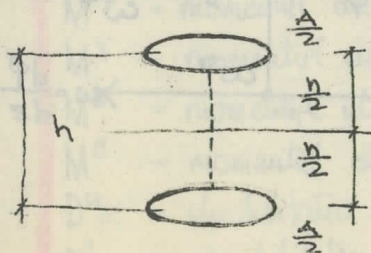
PROPRIETĂȚILE BRATULUI DE PIRGHIE

1. BRATUL DE PIRGHIE AL FORTELOR INTERIOARE ESTE MAI MIC DECÎT ÎNĂLȚIMEA SECȚIUNII ($y_0 < h$)
2. BRATUL DE PIRGHIE AL FORTELOR INTERIOARE CREȘTE LENT ODATA CU ÎMPRĂȘTIEREA MATERIALULUI PE VERTICALĂ:

$$y_0 = \frac{\iint_A y^2 dA}{\iint_{A_1(A_2)} y^2 dA} \quad \begin{array}{l} \text{CREȘTEREA REZULTA} \\ \text{DIN DIFERENȚA} \\ \text{PUTERILOR} \end{array}$$

CRITERIUL RANDAMENTULUI SECȚIUNII (ρ)

CU ARIA A ȘI ÎNĂLȚIMEA h SE DEFINESTE O SECȚIUNE IDEALĂ DE REFERINȚĂ - O SECȚIUNE LIMITĂ CARE SERVEȘTE DREPT REPER PENTRU A PUTEA COMPARA SECȚIUNILE REALE ÎNTRE ELE



$$I_i = 2 \left(\frac{A}{2} \right) \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{Ah^2}{4}$$

$$W_i = \frac{I_i}{\left(\frac{h}{2} \right)} = \frac{Ah}{2}$$

PENTRU O ARIE A ȘI O ÎNĂLȚIME ÎMPROBĂ h RAM-
-DAMENTUL SECȚIUNII SE DEFINESTE ASTFEL:

$$\rho = \frac{W_{\text{REALIZAT}}}{W_{\text{IDEAL}}}$$

PENTRU CELE TREI SECȚIUNI LUATE ÎN STUDIU AVEM:

$$\rho = \frac{\frac{Ah}{4}}{\frac{Ah}{2}} = \frac{1}{2} \quad \rho = \frac{\frac{Ah}{6}}{\frac{Ah}{2}} = \frac{1}{3} \quad \rho = \frac{\frac{Ah}{12}}{\frac{Ah}{2}} = \frac{1}{6}$$

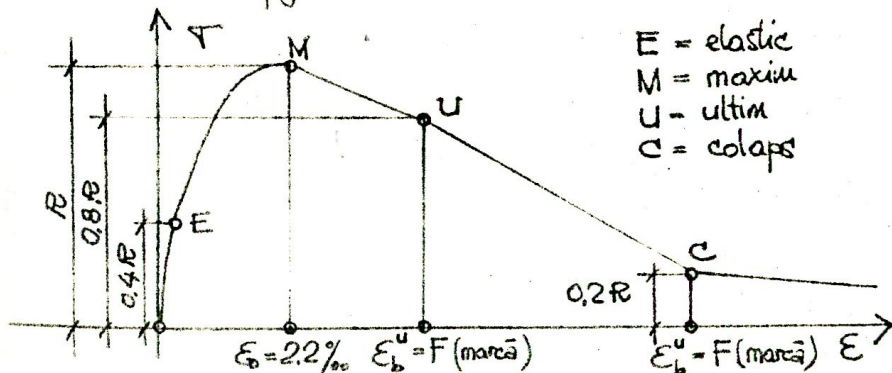
RECAPITULARE

	$\frac{Ah^2}{4}$	$\frac{Ah}{2}$	$\frac{Ah}{4}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$
	$\frac{Ah^2}{6}$	$\frac{Ah}{3}$	$\frac{Ah}{6}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{h}{3}$
	$\frac{Ah^2}{8}$	$\frac{Ah}{4}$	$\frac{Ah}{8}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{h}{4}$
	$\frac{Ah^2}{12}$	$\frac{Ah}{6}$	$\frac{Ah}{12}$	$\frac{h}{6}$	$\frac{h}{6}$
	$\frac{Ah^2}{24}$	$\frac{Ah}{12}$	$\frac{Ah}{12}$	$\frac{h}{12}$	$\frac{h}{12}$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	0	0	0	0	0
	I_x	I_x	S^0	S^0	S

2.2. Ipoteze generale:

- se admite ipoteza secțiunilor plane în toate fazele de lucru, de la faza "zero" până la faza "colaps";
- în zona comprimată a secțiunii de beton se admite o diagramă "T-ε" obținută experimental sau aproximativ analitic printr-o funcție $T = T(\epsilon)$;
- după fisurarea zonei întinse (Ia) participarea betonului la rezistența secțiunii se neglijează;
- diagrama "T-ε" pentru oțelurile ductile folosite în mod curent (OB 37, PC 52, PC 60) se admite de tipul elasto-plastic.

Pentru programul GG-01 (COCG-Institutul de Arhitectură) diagrama "T-ε" a betonului a fost schematizată ca în fig. 2.



Acest program oferă grafic și numeric următoarele elemente:

- M^F - momentul de fisurare;
- M^Y - momentul de curgere;
- M^u - momentul ultim (rupere convențională);
- M^c - momentul de colaps;
- D^u - ductilitatea ultimă = $\frac{\omega^u}{\omega^Y}$;
- D^c - ductilitatea de colaps = $\frac{\omega^c}{\omega^Y}$.

2.3. Comportarea secțiunilor de beton armat în domeniul I (rezumat):

În acest domeniu ambele materiale, beton și oțel, lucrează la întindere și compresie elastic cu deformări care nu depășesc 0.1‰. Acest mod de lucru se întâlnește rar la unele categorii speciale de structuri, la care nu se admit nici un fel de fisuri (conduite de presiune, rezervoare).

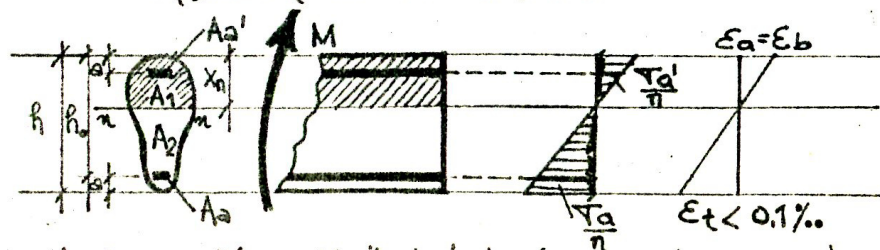
În afara valorii practice pentru tipurile de structuri amintite, studiul acestui domeniu este interesant în sine deoarece permite, prin generalizare, să se obțină conceptele, relațiile de calcul și criteriile încovierii pentru materialele eterogene, în aceeași formă ca și pentru materialele omogene izorezistente.

În acest domeniu de lucru se poate admite legea lui Hooke și constanta raportului "n" dintre moduli de elasticitate ai armăturii și betonului:

$$n = \frac{E_a}{E_b} \approx \text{const.}$$

Ecuatiile de echilibru exprimă condițiile cunoscute:

- a) forțele interioare au rezultanta nulă ($\vec{C} + \vec{T} = 0$) (1)
- b) momentul cuplului interior este egal cu momentul exterior ($Cz = Iz = M$) (2).



A_1, A_2 = ariile secțiunii de beton (comprimată, întinsă)
 A_a, A_b = ariile secțiunilor de armătură (comprimată, întinsă).

$$\int_{A_1} \tau_b dA + \int_{A_2} \tau_b dA + \int_{A_a} \tau_a dA + \int_{A_a'} \tau_a dA = 0 \quad (1)$$

$$\int_{A_1} \tau_b x dA + \int_{A_2} \tau_b x dA + \int_{A_a} \tau_a x dA + \int_{A_a'} \tau_a x dA = M \quad (2)$$

Din sinteza (F+G) se știe că eforturile sînt proporționale cu distanța pînă la fibra neutră

$$\tau_b = \frac{E_b}{\rho} \cdot x$$

$$\tau_a = \frac{E_a}{\rho} \cdot x = \frac{n E_b}{\rho} \cdot x$$

Dezvoltarea relației (1) de echilibru:

$$\int_{A_1} \tau_b dA = \frac{E_b}{\rho} \cdot S_1$$

$$\int_{A_2} \tau_b dA = \frac{E_b}{\rho} \cdot S_2$$

$$\int_{A_a} \tau_a dA = \frac{n E_b}{\rho} \cdot S_a$$

$$\int_{A_a'} \tau_a dA = \frac{n E_b}{\rho} \cdot S_a'$$

$$S_1, S_2, S_a, S_a' =$$

= momente statice ($\pm$)

$$\frac{E_b}{\rho} [S_1 + S_2 + n(S_a + S_a')] = 0$$

Conceptul de moment static ideal:

$$S_i = S_1 + S_2 + n(S_a + S_a')$$

Condiția de definire a centrului de greutate

și a axei neutre

$$S_i = 0$$

$$S_1 + S_2 + n(S_a + S_a') = 0$$

Dezvoltarea relației (2) de echilibru:

$$\int_{A_1} \tau_b x dA = \frac{E_b}{\rho} \cdot I_1$$

$$\int_{A_2} \tau_b x dA = \frac{E_b}{\rho} \cdot I_2$$

$$\int_{A_a} \tau_a x dA = \frac{n E_b}{\rho} \cdot I_a$$

$$\int_{A_a'} \tau_a x dA = \frac{n E_b}{\rho} \cdot I_a'$$

$I_1, I_2, I_a, I_a' =$ momente de inerție ($\pm$)

$$M = \frac{E_b}{\rho} [I_1 + I_2 + n(I_a + I_a')] = \frac{E_b}{\rho} I_i \quad \text{unde}$$

$$I_i = I_1 + I_2 + n(I_a + I_a') = \text{momentul de inerție ideal}$$

Generalizarea formulei lui Navier:

a) pentru beton $\tau_b = \frac{M}{I_i} x$

b) pentru armătură $\tau_a = n \frac{M}{I_i} x$

Eforturi maxime. Generalizarea conceptului de modul de rezistență:

$$\tau_b^{\max} = \frac{M}{I_i} x_b^{\max} = \frac{M}{W_i^b}$$

$$\tau_a^{\max} = n \frac{M}{I_i} x_a^{\max} = n \frac{M}{W_i^a}$$

$W_i^b, W_i^a =$ moduli de rezistență ideali

Rezultatele eforturilor de compresie (c) și întindere (i)

$$\sigma_c = \frac{E_b}{\rho} [S_1 + n S_a'] = \frac{E_b}{\rho} \cdot S_i^c$$

$$\sigma_i = \frac{E_b}{\rho} [S_2 + n S_a] = \frac{E_b}{\rho} \cdot S_i^i$$

Echilibrul global. Generalizarea conceptului de braț de pîrghie:

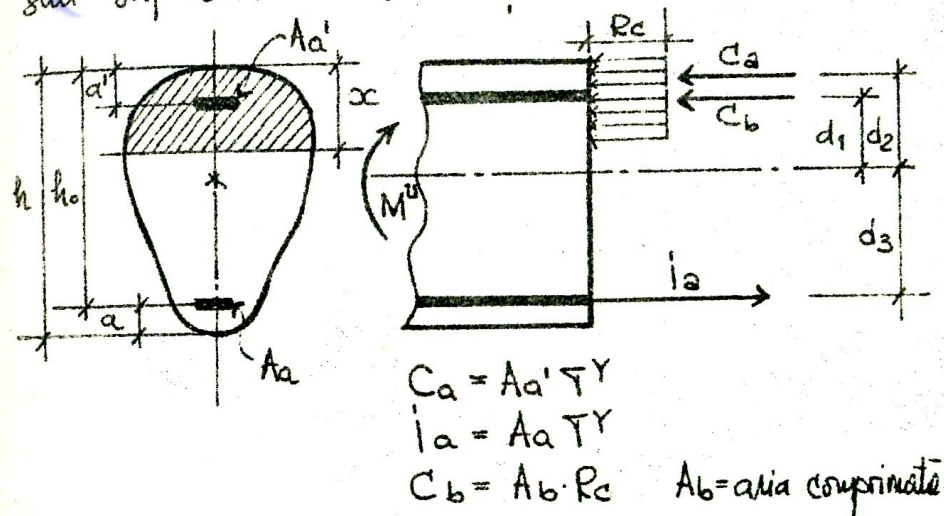
$$M = \frac{E_b}{\rho} I_i = \frac{E_b}{\rho} \cdot S_i^c \cdot z$$

$$z = \frac{I_i}{S_i^c}$$

În cazul secțiunilor din materiale izoexistente z este notat cu y_0 .

2.4. Determinarea momentului de rupere cu diagrame de tipul bloc dreptunghiular (stadiul III a)

Se înlocuiește diagrama "T-E" neliniară cu o diagramă simplificată în care eforturile se distribuie uniform. În acest caz pentru determinarea momentului de rupere sunt suficiente numai condițiile de echilibru.

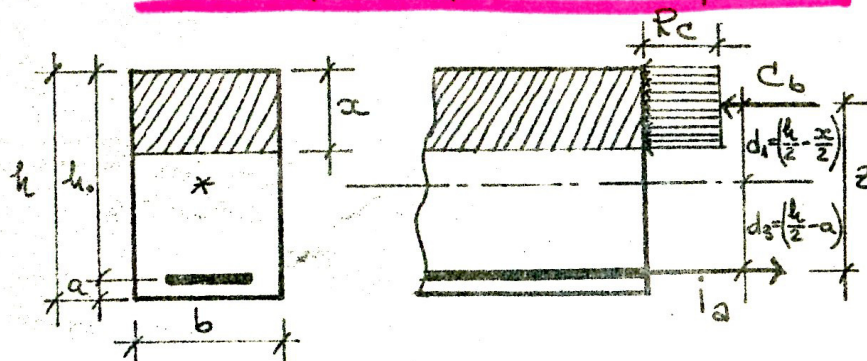


În funcție de concepția (metoda) de calcul ("la rupere" cu coeficient de siguranță unic sau după "stările limită") valoarea rezistenței de rupere a betonului prin compresie R_c se va introduce în mod diferit; la fel și limitele de curgere ale oțelului T.Y. În cele ce urmează se va aplica metoda de calcul la rupere cu coeficient de siguranță unic, care permite:
 (1) înțelegerea directă a fenomenului, (2) proporționarea corectă a secțiunilor pe baza unor relații simple.
 Condițiile de echilibru se scriu astfel:

$$C_b + C_a = I_a \quad (1)$$

$$M^u = I_a \cdot x \cdot d_3 + C_a \cdot x \cdot d_2 + C_b \cdot x \cdot d_1 \quad (2)$$

4.1. Cazul secțiunii dreptunghiulare simplu armate



Condițiile de echilibru devin:

$$C_b = I_a \quad (1)$$

$$M^u = C_b \cdot x \cdot z = I_a \cdot x \cdot z \quad (2)$$

$z = (h - \frac{x}{2} - a) = \text{bratul de pînglie al forțelor interne}$

Exploatarea condiției (1)

Condiția (1) oferă posibilitatea determinării axei neutre

$$C_b = b \cdot x \cdot R_c$$

$$I_a = A_a \cdot \gamma$$

$$b \cdot x \cdot R_c = A_a \cdot \gamma$$

$$x = \frac{A_a \cdot \gamma}{b \cdot R_c}$$

$$\xi = \frac{x}{h} = \frac{A_a}{b \cdot h} \cdot \frac{\gamma}{R_c} = \left(\mu \frac{\gamma}{R_c} \right) = K$$

$\mu = \text{coeficientul de armare}$

$$\mu \% = 100 \mu = \frac{A_a \times 100}{b \cdot h} = \text{procentul de armare}$$

$K = \text{parametru care sintetizează principalele caracteristici ale secțiunii (geometrie, materiale, armare)}$.

Exploatarea condiției (1). Condiția (1) oferă posibilitatea determinării ariei necesare.

$$C_b = b \cdot x \cdot R_c$$

$$I_e = A_e \cdot \sigma_y$$

$$b \cdot x \cdot R_c = A_e \cdot \sigma_y$$

$$x = \frac{A_e \cdot \sigma_y}{b \cdot R_c}$$

$$\xi = \frac{x}{h} = \frac{A_e}{b \cdot h} \cdot \frac{\sigma_y}{R_c} = \left(\mu \cdot \frac{\sigma_y}{R_c} \right) = K$$

μ = coeficientul de armare

$$\mu \% = 100 \mu = \frac{A_e \cdot 100}{b \cdot h} = \text{procentul de armare}$$

K = parametru care sintetizează principalele caracteristici ale secțiunii (geometrie, materiale, armare)

ξ = parametrul ariei necesare care definește frecvența comprimată a secțiunii transversale.

Cu cât secțiunea va fi mai puternic armată cu atât ξ va fi mai mare și invers. Există o valoare ξ (de calcul) care caracterizează limite de "supersaturare" (ale "seturării" cu armătură) a unei secțiuni; pentru o secțiune dreptunghiulară această valoare este de 0,5 ($\xi_{max} = 0,5$). Pentru valori mai mici, armătura nu atinge în general limite de curgere și secțiunea devine reversibilă.

Exploatarea condiției (2).

(a) Formă $M^u = C_b \cdot Z$

$$Z = \left(h - \frac{x}{2} - e \right) = h (1 - 0,5 \xi - \alpha) = \gamma h$$

unde,

$$\alpha = \left(\frac{e}{h} \right) = \text{coeficientul poziției armăturii întinse}$$

$$\gamma = \text{coeficientul brațului de pîngă}$$

$$M^u = (b \cdot x \cdot R_c) \cdot (\gamma h)$$

Se introduce noțiunea de "moment izvoezistent" drept criteriu unitar pentru a judeca gradul de exploatare al secțiunii ca geometrie și materiale. Prin definiție momentul izvoezistent, notat cu $\bar{M}$ se determină cu relația,

$$\bar{M} = W^u \cdot R_c = \frac{b h^2}{6} R_c$$

Legătura dintre capacitatea la înoviere a secțiunii și momentul izvoezistent este de formă:

$$M^u = m \bar{M}$$

Aici "m" este coeficientul care sugerează exploatarea complexă a secțiunii.

În aceste condiții relația de mai sus devine,

$$\frac{M^u}{\bar{M}} = m = (6 \gamma K)$$

$$m = 6 \gamma K$$

Dimensionarea secțiunii dreptunghiulare. În vederea de mai jos se presupune înălțimea h ,

$$M^u = m \cdot \frac{b h^2}{6} \cdot R_c$$

$$h = \left(\sqrt{\frac{6}{m}} \right) \cdot \sqrt{\frac{M^u}{b R_c}} = \kappa \sqrt{\frac{M^u}{b R_c}}$$

κ = parametrul înălțimii secțiunii

(b) Forțe $M^u = I_0 \cdot Z$

$$M^u = A_e \sigma^Y \cdot \gamma \cdot h$$

$$A_e = \frac{M^u}{\gamma \sigma^Y h} = \left(\frac{1}{\gamma \sigma^Y} \right) \cdot \left(\frac{M^u}{h} \right)$$

Această relație poate fi folosită pentru determinarea armăturii (armare) când înălțimea secțiunii „ h ” este o dată a problemei.

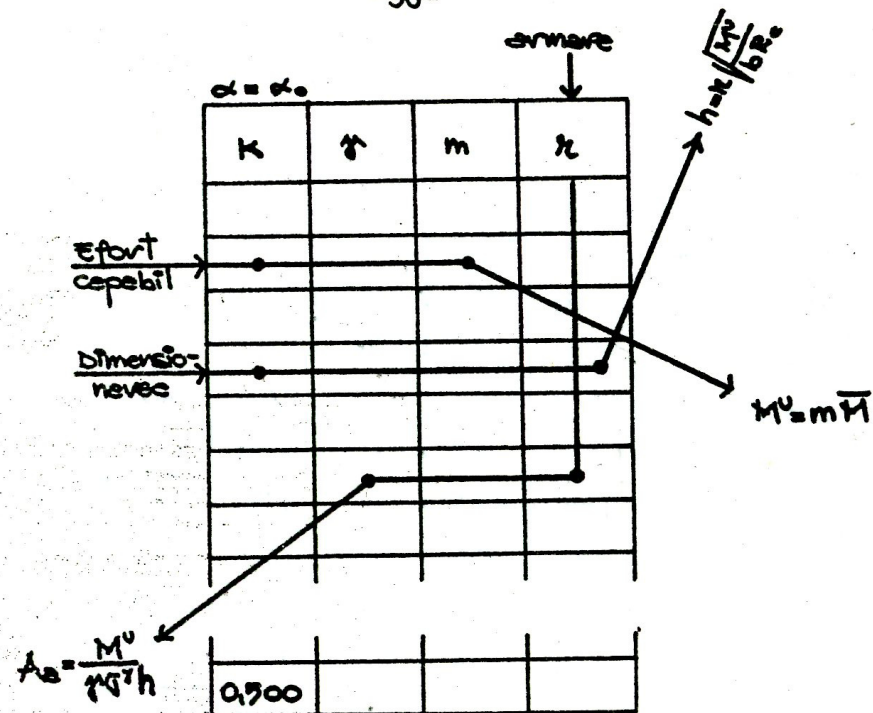
Tabele de calcul. Elementele care au intervenit și armura γ , m , κ sînt funcții de K și de α ; ele pot fi întărite în funcție de K după fixarea unor valori uzuale pentru α care este un element relativ secundar ($\alpha = 0,05; 0,075; 0,10$):

$$\gamma = (1 - 0,5K - \alpha)$$

$$\alpha = \frac{a}{h}$$

$$m = 6 \gamma K$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{6}{m}}$$



Observarea tabelelor Elemente care intervin:

$b, h, a, A_e, \sigma^Y, R_c, M^u$

DIMENSIONAREA $h = ?$

se propune un procent de armare rațional (μ)

se alege o lățime convenabilă (l)

se alege α

se determină valorile de intrare în tabele $K = \mu \frac{\sigma^Y}{R_c}$

Pentru acest K corespunde un număr κ și respectiv

h ,

$$h = \kappa \sqrt{\frac{M^u}{b R_c}}$$

TABELUL 1, $\alpha = 0,05$.

	K	γ	m	r	K	γ	m	r
$\gamma = 0,950 - 0,5K$; $m = 68K$; $r = \sqrt{6m}$	0,01	0,945	0,0567	10,287	0,26	0,820	1,2792	2,166
	0,02	0,940	0,1128	7,293	0,27	0,815	1,3203	2,132
	0,03	0,935	0,1683	5,971	0,28	0,810	1,3608	2,100
	0,04	0,930	0,2232	5,185	0,29	0,805	1,4007	2,070
	0,05	0,925	0,2775	4,650	0,30	0,800	1,4400	2,041
	0,06	0,920	0,3312	4,256	0,31	0,795	1,4787	2,014
	0,07	0,915	0,3843	3,951	0,32	0,790	1,5168	1,989
	0,08	0,910	0,4368	3,706	0,33	0,785	1,5543	1,965
	0,09	0,905	0,4887	3,504	0,34	0,780	1,5912	1,942
	0,10	0,900	0,5400	3,333	0,35	0,775	1,6275	1,920
	0,11	0,895	0,5907	3,187	0,36	0,770	1,6632	1,899
	0,12	0,890	0,6408	3,060	0,37	0,765	1,6983	1,880
	0,13	0,885	0,6903	2,948	0,38	0,760	1,7328	1,861
	0,14	0,880	0,7392	2,849	0,39	0,755	1,7667	1,843
	0,15	0,875	0,7875	2,760	0,40	0,750	1,800	1,826
	0,16	0,870	0,8352	2,680	0,41	0,745	1,8327	1,809
	0,17	0,865	0,8823	2,608	0,42	0,740	1,8648	1,794
	0,18	0,860	0,9288	2,542	0,43	0,735	1,8963	1,779
	0,19	0,855	0,9747	2,481	0,44	0,730	1,9272	1,764
	0,20	0,850	1,0200	2,425	0,45	0,725	1,9575	1,751
	0,21	0,845	1,0647	2,374	0,46	0,720	1,9872	1,738
	0,22	0,840	1,1088	2,362	0,47	0,715	2,0163	1,725
	0,23	0,835	1,1523	2,282	0,48	0,710	2,0448	1,713
	0,24	0,830	1,1952	2,241	0,49	0,705	2,0727	1,701
	0,25	0,825	1,2375	2,202	0,50	0,700	2,1000	1,690

TABELUL 2, $\alpha = 0,075$.

	K	γ	m	r	K	γ	m	r
$\gamma = 0,925 - 0,5K$; $m = 68K$; $r = \sqrt{6m}$	0,01	0,920	0,0552	10,426	0,26	0,795	1,2402	2,199
	0,02	0,915	0,1098	7,392	0,27	0,790	1,2798	2,165
	0,03	0,910	0,1638	6,052	0,28	0,785	1,3188	2,133
	0,04	0,905	0,2172	5,256	0,29	0,780	1,3572	2,103
	0,05	0,900	0,2700	4,714	0,30	0,775	1,3950	2,074
	0,06	0,895	0,3222	4,315	0,31	0,770	1,4322	2,047
	0,07	0,890	0,3738	4,006	0,32	0,765	1,4688	2,021
	0,08	0,885	0,4248	3,758	0,33	0,760	1,5048	1,997
	0,09	0,880	0,4752	3,553	0,34	0,755	1,5402	1,974
	0,10	0,875	0,5250	3,381	0,35	0,750	1,5750	1,952
	0,11	0,870	0,5742	3,233	0,36	0,745	1,6092	1,931
	0,12	0,865	0,6228	3,104	0,37	0,740	1,6428	1,911
	0,13	0,860	0,6708	2,991	0,38	0,735	1,6758	1,892
	0,14	0,855	0,7182	2,890	0,39	0,730	1,7082	1,874
	0,15	0,850	0,7650	2,801	0,40	0,725	1,7400	1,857
	0,16	0,845	0,8112	2,720	0,41	0,720	1,7712	1,841
	0,17	0,840	0,8568	2,646	0,42	0,715	1,8018	1,825
	0,18	0,835	0,9018	2,579	0,43	0,710	1,8318	1,810
	0,19	0,830	0,9462	2,518	0,44	0,705	1,8612	1,795
	0,20	0,825	0,9900	2,462	0,45	0,700	1,8900	1,782
	0,21	0,820	1,0332	2,410	0,46	0,695	1,9182	1,769
	0,22	0,815	1,0758	2,362	0,47	0,690	1,9458	1,756
	0,23	0,810	1,1178	2,317	0,48	0,685	1,9728	1,744
	0,24	0,805	1,1592	2,275	0,49	0,680	1,9992	1,732
	0,25	0,800	1,2000	2,236	0,50	0,675	2,0250	1,721

TABELUL 3

 $\alpha = 0,100$

	K	γ	m	η	K	γ	m	η
	0,01	0,895	0,0537	10,570	0,26	0,770	1,2012	2,235
	0,02	0,890	0,1068	7,495	0,27	0,765	1,2393	2,200
	0,03	0,885	0,1593	6,137	0,28	0,760	1,2768	2,168
	0,04	0,880	0,2112	5,330	0,29	0,755	1,3137	2,137
	0,05	0,875	0,2625	4,781	0,30	0,750	1,3500	2,108
	0,06	0,870	0,3132	4,377	0,31	0,745	1,3857	2,081
	0,07	0,865	0,3633	4,064	0,32	0,740	1,4208	2,055
	0,08	0,860	0,4128	3,812	0,33	0,735	1,4553	2,030
	0,09	0,855	0,4617	3,605	0,34	0,730	1,4892	2,007
	0,10	0,850	0,5100	3,430	0,35	0,725	1,5225	1,985
	0,11	0,845	0,5577	3,280	0,36	0,720	1,5552	1,964
	0,12	0,840	0,6048	3,150	0,37	0,715	1,5873	1,944
	0,13	0,835	0,6513	3,035	0,38	0,710	1,6188	1,925
	0,14	0,830	0,6972	2,934	0,39	0,705	1,6497	1,907
	0,15	0,825	0,7425	2,843	0,40	0,700	1,6800	1,890
	0,16	0,820	0,7872	2,761	0,41	0,695	1,7097	1,873
	0,17	0,815	0,8313	2,687	0,42	0,690	1,7388	1,858
	0,18	0,810	0,8748	2,613	0,43	0,685	1,7673	1,843
	0,19	0,805	0,9177	2,557	0,44	0,680	1,7952	1,828
	0,20	0,800	0,9600	2,500	0,45	0,675	1,8225	1,814
	0,21	0,795	1,0017	2,448	0,46	0,670	1,8492	1,801
	0,22	0,790	1,0428	2,399	0,47	0,665	1,8753	1,789
	0,23	0,785	1,0833	2,353	0,48	0,660	1,9008	1,777
	0,24	0,780	1,1232	2,311	0,49	0,655	1,9257	1,765
	0,25	0,775	1,1625	2,272	0,50	0,650	1,9500	1,754

$\gamma = 0,900 - 0,5\kappa$; $m = 6\kappa$; $\eta = \frac{1}{6}\kappa$

ARMAREA SECȚIUNII $A_c = ?$ se specificează α se determină valoarea η cu referințe,

$$\eta = \frac{h}{\sqrt{\frac{M^u}{b R_c}}}$$

Pentru acest η corespunde o anumită valoare γ și respectiv A_c ,

$$A_c = \frac{M^u}{\gamma \eta h}$$

MOMENTUL CAPACIT $M^u = ?$ se determină α și se alege tabelul de întiere.

se determină elementul de întiere în tabelul K

Pentru acest K corespunde un număr m și respectiv M^u ,

$$M^u = m \cdot \bar{M}$$

$$\bar{M} = \frac{b h^2}{6} \cdot R_c$$

Formule simplificate de calcul. În cazul folosirii unor procente uzuale de armare ($\mu = 0,5 \div 1,2$) poate fi adoptată pentru lățimea de pînghie o valoare medie,

$$\eta_{medie} \approx \frac{7}{8} h$$

De asemenea pentru lățimile de curgere ale detunilor se introduc valorile medii cunoscute din practică,

$$\begin{array}{lll} \eta = 2,85 \text{ t/cm}^2 & \text{---} & \text{ptr. OB 37} \\ \eta = 3,80 & \text{---} & \text{ptr. PC 92} \\ \eta = 4,20 & \text{---} & \text{ptr. PC 60} \end{array}$$

Cu aceste valori medii se dau următoarele relații aproximative de calcul:

$$A_e^{(cm^2)} = K \frac{M^0(th)}{h(cm)}$$

$$M^0(th) = K' \cdot h^{(m)} \cdot A_e^{(cm^2)}$$

$$K' = \frac{1}{K}$$

$$K = \left(\frac{8}{7 \sqrt{Y}} \right) = \begin{cases} 0,4 \rightarrow OB 37 \\ 0,3 \rightarrow PC 92 \\ 0,27 \rightarrow PC 60 \end{cases}$$

Interpretarea formulei care determină consumul de oțel.

$$A_e = \frac{C \cdot M_{exp}}{\sum \sigma Y}$$

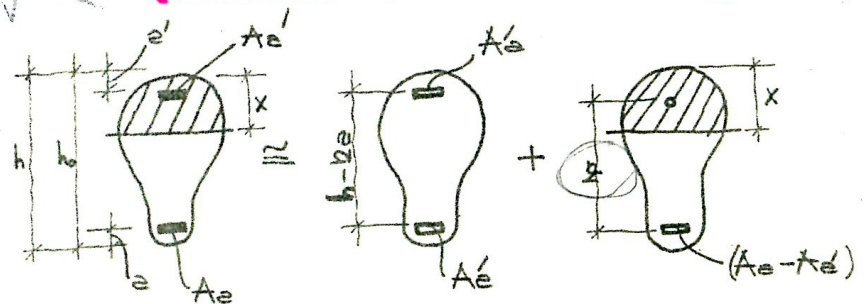
gradul de siguranță (coef. de siguranță)
 Incălzire
 beroliden
 calitate oțelului
 distribuția materialului în cadrul secțiunii
 $\beta \cdot h$
 înălțimea secțiunii

Pentru a micșora consumul de oțel în limite rezonabile se va acționa asupra următoarelor parametri de concepție:

- gradul de siguranță (coef. de siguranță) va fi diferentiat în funcție de gruparea încărcărilor (fundamentale, suplimentare, extraordinare), de importanța construcției, etc.

- se va urmări consecvent diminuarea încălzirilor prin usurea construcțiilor și coexistențelor cât mai fidèle a mediului mecanic-climatic
- deschiderile vor fi reduse la limite strict necesare funcțiunii ținând seama de faptul că momentele sunt în general proporționale cu pătratul deschiderilor iar săgețile cu puterea a patre a deschiderii
- materialele vor fi distribuite rațional între zone compunse și întinse pentru a obține un bust cât mai mare.
- vor fi evitate exagerările privind micșorarea înălțimii grinzilor.
- vor fi folosite de preferință oțelurile cu limite de curgere reduse (PC 92, PC 60).

A.2. Cazul secțiunilor dublu aruate.



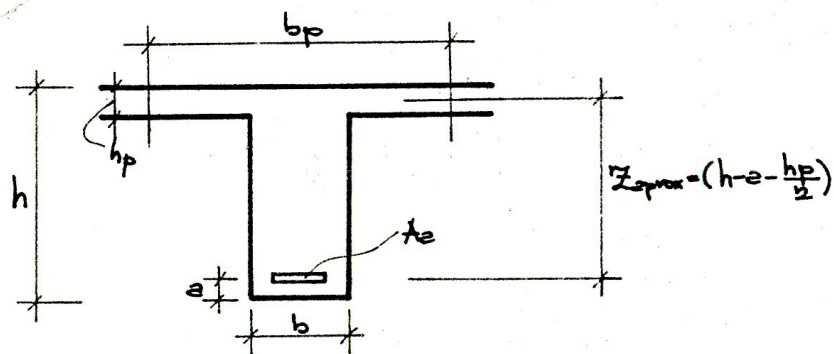
Deci există certitudinea că ambele arcuri ating limite de curgere în stadiul ultim (cazul curent) atunci capacitatea la încovoiere se obține din însumarea unui cuplu obișnuit cu momentul capșorilor el unei secțiuni

simply armate :

$$M^u = A_e' \sigma^y (h - 2a) + (A_e - A_e') \sigma^y \cdot \bar{x}$$

pentru secțiunile dreptunghiulare se mențin toate rezultatele obținute anterior : tabele , formule simplificaste , etc.

4.3. Centrul secțiunii T.



Axe neutre se poate situi în tulpă , în iniua grinzii sau la greutate olivie de . Cu destulă exactitate se admite că buetul de pînghie este defruit de olivie centrul ole greutate ol smăturii intînse și jumătatea instituții tulpă comprimate ; în aceste condiții smăturii intînse se determină cu o relație simplă ,

$$A_e \approx \frac{M^u}{\sigma^y \cdot z_{aprox}}$$

Deci în contextul structurii tulpă secțiunii este și - toate în zone intînse atunci secțiunea se fi tratate ca o simplă secțiune dreptunghiulară.



3. ÎNCOVOIERE CU FORȚA TĂIETOARE

Încovoierea pură este un caz particular ; cazul uzual este cel al încovoierii cu forțe transversale (tăietoare). Eforturile tangențiale care însoțesc forțele tăietoare , modifică esențial traiectoriile eforturilor principale și întreaga comportare a structurilor plate (grinzi , dale , etc.... Fig:1)

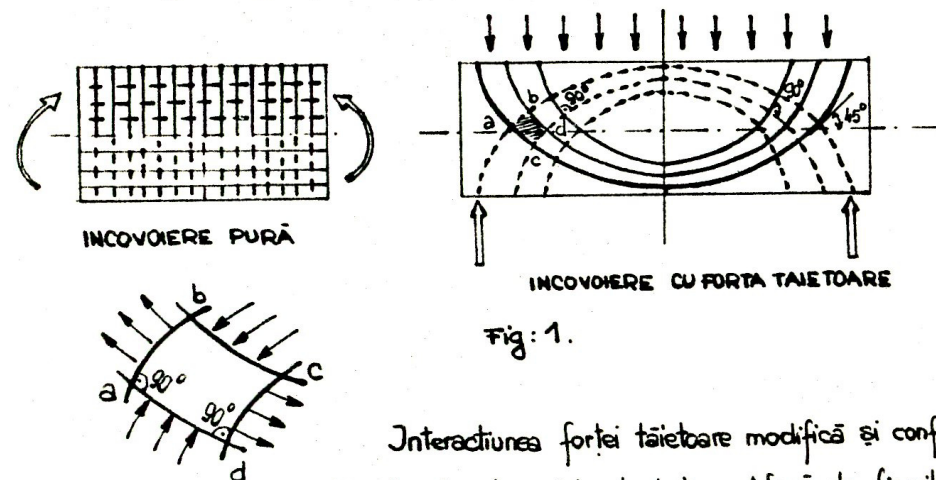
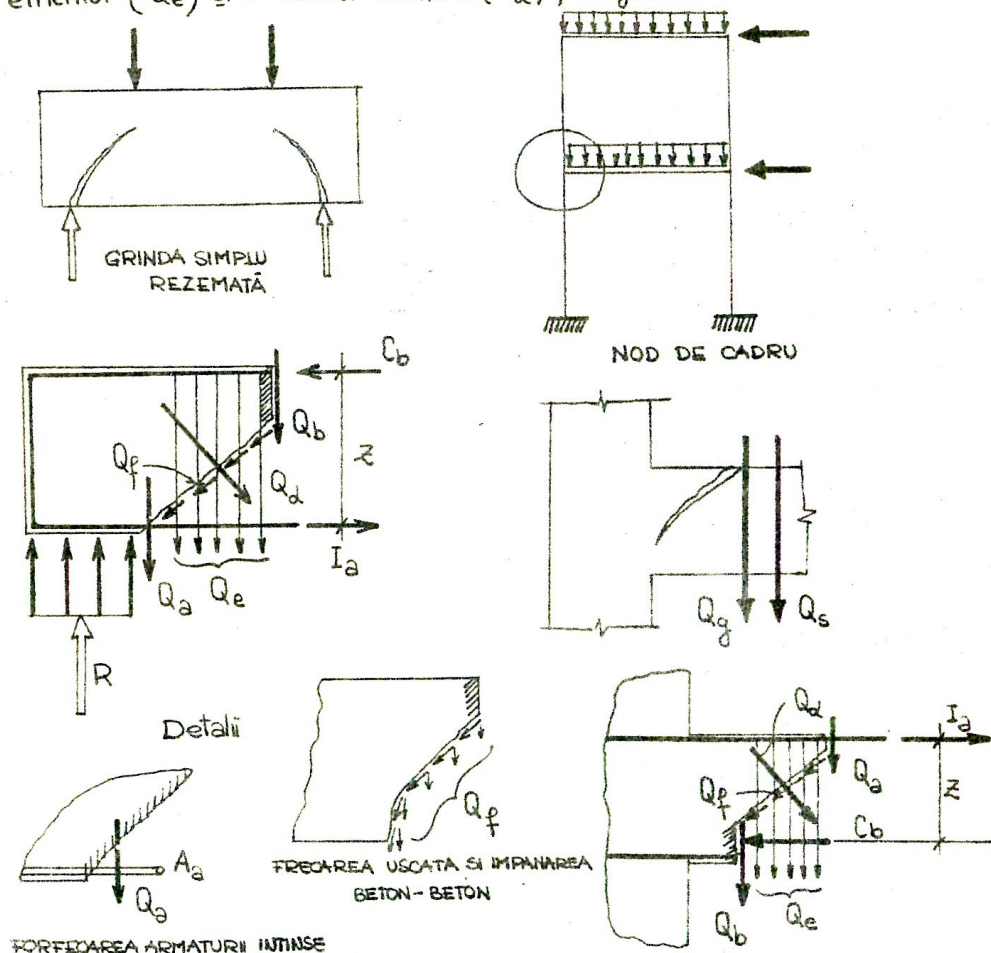


Fig:1.

Interacțiunea forței tăietoare modifică și configurația fisurilor în elementele de beton. Afară de fisurile specifice încovoierii , sensibil perpendiculare pe axa barei , apar în zonele apropiate de rezeme , crăpături înclinate , casante (uneori explozive) , aproximativ paralele cu traiectoriile eforturilor principale de compresie . În partea comprimată a secțiunii , are loc o zdrobire relativ casantă a betonului din compresie combinată cu forfecare . La preluarea forței tăietoare în stadiul ultim de fisurare din solicitarea mixtă , încovoiere - forfecare , participă în mod interconectat atât betonul cât și sistemul de armare longitudinal - transversal (SALT). Betonul participă prin forfecarea directă în zona comprimată ($\bar{Q}_b$) și prin efectul combinat de frecare uscată și împănare beton - beton dealungul fisurilor ($\bar{Q}_f$).

Sistemul de armături participă prin forfecarea directă, a armăturii longitudinale în dreptul fisurii (efect de pană = Q_a), prin întinderea etrierilor (Q_e) și a barelor înclinate (Q_α), Fig. 2



$$Q_u = Q_{\text{beton}} + Q_{\text{armătură}} = [Q_b + Q_f] + [Q_e + Q_\alpha \cdot \cos \alpha + Q_a]$$

forfecarea betonului comprimat frecară uscată și împănare beton-beton

întinderea în etrieri întinderea în armăturile înclinate

forfecarea armăturii întinse

Fig: 2

Spre deosebire de cazul încovoierei pure, betonul este solicitat la „forfecare - lunecare”, deoarece fiecare coloană elementară de beton, dx trebuie să asigure variația eforturilor normale de compresie în beton „ dC_b ” și de întindere în armătură „ dI_a ” - Fig: 3

dC_b = variația forțelor de compresie pe lungimea dx
 dI_a = idem a forțelor de întindere
 dL = forța de lunecare care asigură aceste variații

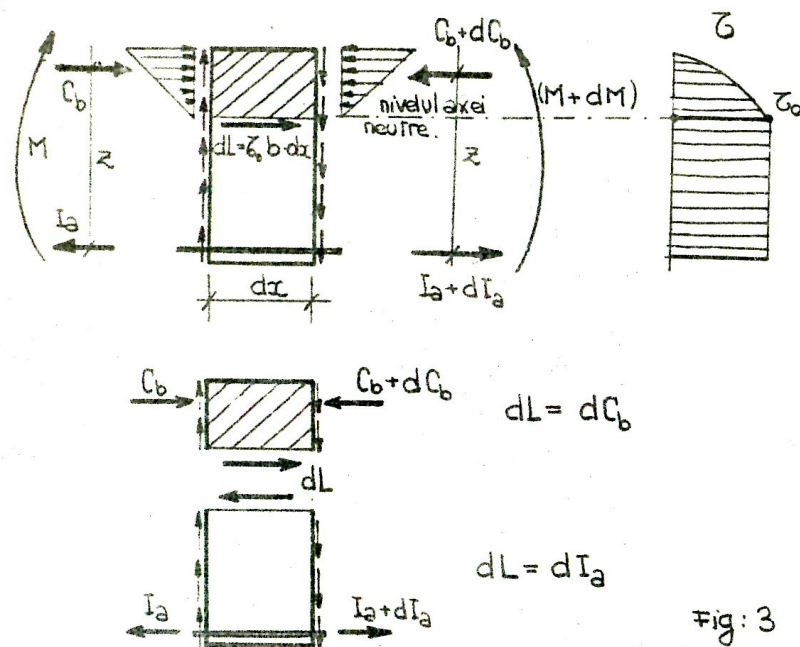


Fig: 3

$$dL = \tau_0 \cdot b \cdot dx = dC_b = dI_a \quad (1)$$

$$\tau_0 : \text{efortul de lunecare - forfecare la nivelul axei neutre.}$$

$$dM = dC_b \cdot x \quad (2)$$

Din (1) și (2) se obține

$$\tau_0 = \frac{Q}{b \cdot x}$$

Acest efort tangential se menține teoretic constant pe înălțimea zonei întinse considerată inactivă pentru eforturi de întindere. (Fig. 3).

În majoritatea cazurilor, betonul nu este în măsură să transmită eforturile de conlucrare la betonul comprimat și armătura întinsă, iar elementul fisurează pe trasee înclinate (oblice).

Dacă între betonul comprimat și cel întins nu sînt prevăzute armături transversale, grinda continuă să lucreze ca un fel de arc cu tirant; dacă există astfel de armături de coasere a zonei întinse de cea comprimată, grinda poate fi conformată cu un sistem politriangulat.

În acest din urmă caz pot fi imaginat trei tipuri de legături metalice transversale de coasere: verticale, înclinate la 45° , înclinate la un unghi α

(Fig. 4)

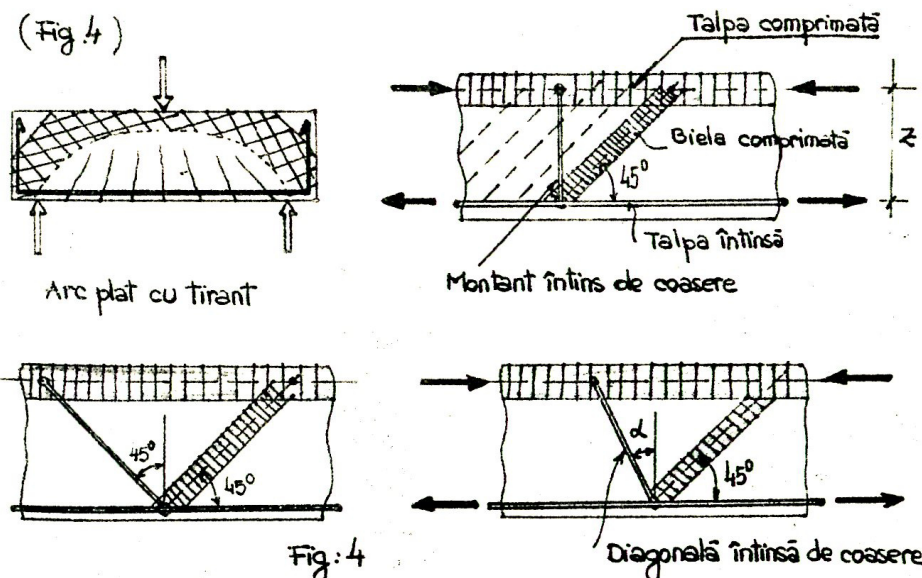


Fig. 4

DETERMINAREA EFORTURILOR ÎN ELEMENTELE ÎNTINSE ȘI COMPRIMATE ALE SISTEMULUI MULTIPLU TRIANGULAT.

Gradul triangulației „n” nu este cunoscut; el depinde de numărul de fire înclinate la 45° , care definesc „bielă comprimată” de beton.

(a). MONTANȚI VERTICAI (ETRIERI)

Efortul într-un montanț :

$$N = \frac{Q}{n}$$

Efortul într-o bielă comprimată :

$$D = \frac{\sqrt{2} Q}{n}$$

Numărul montanților, respectiv al bielor comprimate, pe un metru linear de grindă, este $\left(\frac{n}{z}\right)$; în aceste condiții eforturile N și D pe metru linear de grindă devin:

$$N_{t/m} = \frac{Q}{n} \times \frac{n}{z} = \frac{Q}{z}$$

$$D_{t/m} = \frac{\sqrt{2} Q}{n} \times \frac{n}{z} = \frac{\sqrt{2} Q}{z}$$

Dacă etrierii sînt dispuși la distanța „2” atunci efortul de întindere la care se calculează un etrier devine :

$$N_{t/etier} = \frac{Q}{z} \times 2.$$

Efortul mediu de compresie în beton se determină după cum urmează :

$$A_b = \frac{1}{\sqrt{2}} \times b$$

$$\sigma_b^{mediu} = \frac{D}{A_b} = \frac{\sqrt{2} Q}{z} \times \frac{\sqrt{2}}{b} = \frac{2Q}{bz}$$

$$\boxed{\sigma_b^{mediu} < \sigma_b^{adm.}}$$

$$\tau_1 = \frac{Q}{b \cdot z}$$

$$N_{45}^{t/ml} = \tau_1 \times A_b = \frac{Q}{b \cdot z} \times \frac{b \times 1}{\sqrt{2}} = \frac{Q}{\sqrt{2} \cdot z}$$

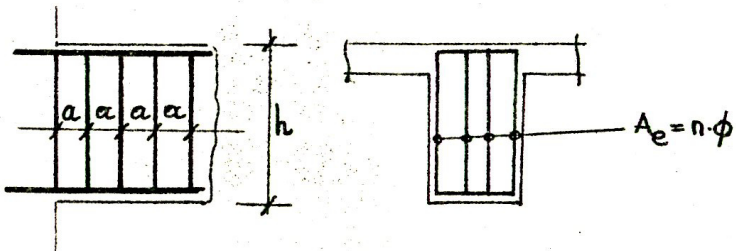
$$\tau_b^{mediu} = \frac{Q}{b \cdot z} = \tau_0 = \tau_2$$

Cu aceste elemente se pot concepe și propoziția armăturilor de crasare în diferite combinații (verticale, înclinate, mixte.)

ARMAREA TRANSVERSALA A GRINZILOR ÎN BAZA ANALOGIEI CU UN SISTEM POLITRIANGULAR

Trestarea este aproximativă și acoperitoare. Prin asimilarea grinzii de beton armat cu un sistem politriangulat, participarea directă a betonului la preluarea forței tăietoare, este subestimată. Pe de altă parte, această participare devine incertă în cazul acțiunilor alternative din cutremure sau alte acțiuni extraordinare. În acest caz în zonele de articulare plastică, mecanismul de participare al betonului la preluarea directă a forței tăietoare se dereglează și un model acoperitor este de preferat.

a) Etrieri verticali (numai)



$$N_e^{u t/ml} = \frac{Q^u}{z}$$

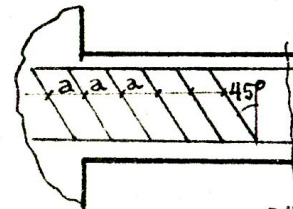
$$N_e^{u t/etrier} = \frac{Q^u \times a}{z}$$

$$A_e^{cm^2} = \frac{Q^u \times a}{\tau_e^Y \times z} \approx \frac{Q^u \times a}{(0,875 \times \tau_e^Y) \times h} = \left(\frac{1}{0,875 \times \tau_e^Y} \right) \times \left(\frac{Q^u}{\frac{h}{a}} \right) = K \times \frac{Q^u}{n}$$

$$A_e^{II} = K \frac{Q^u}{n} \quad Q_u = \left(\frac{n}{K} \right) \cdot A_e^{II}$$

- pentru OB 37 $(\tau_e^Y)_{mediu} = 2,85 \text{ t/cm}^2$
- pentru PC 52 $(\tau_e^Y)_{mediu} = 3,80 \text{ t/cm}^2$

$$\left[\begin{array}{l} K^{37} = 0,40 \\ K^{52} = 0,30 \end{array} \right] \quad \left\| \quad \begin{array}{l} A_e^{37} = 0,40 \frac{Q^u}{n} \\ A_e^{52} = 0,30 \frac{Q^u}{n} \end{array} \right\|$$



b) Etrieri oblici la 45° (numai)

$$N_e^{u t/ml} = \frac{Q^u}{(\sin \alpha + \cos \alpha) z} = \frac{Q^u}{\sqrt{2} \cdot z}$$

$$N_e^{u t/etrier} = \frac{Q^u \times a}{\sqrt{2} \times z}, \quad z \approx 0,875 h$$

$$A_e^{II} = K \left(\frac{Q^u}{n} \right) \quad Q_u = \left(\frac{n}{K} \right) \cdot A_e^{II}$$

$$K^{37} = \left(\frac{0,400}{\sqrt{2}} \right); \quad K^{52} = \left(\frac{0,300}{\sqrt{2}} \right)$$

RECAPITULARE

ETRIERI VERTICALI

II

$$A_e = K \frac{Q^u}{n} ; Q^u = \left(\frac{n}{K} \right) \times A_e$$

$$K^{37} = 0,400$$

$$K^{52} = 0,300$$

ETRIERI OBLICI LA 45°

$$A_e = K \frac{Q^u}{n} ; Q^u = \left(\frac{n}{K} \right) \times A_e$$

$$K^{37} = \frac{0,400}{\sqrt{2}} ; K^{52} = \frac{0,300}{\sqrt{2}}$$

ETRIERI OBLICI LA α°

$$A_e = K \frac{Q^u}{n} ; Q^u = \left(\frac{n}{K} \right) \times A_e$$

$$K^{37} = \frac{0,400}{(\sin \alpha + \cos \alpha)} ; K^{52} = \frac{0,300}{(\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

BARE RIDICATE LA 45°

$$A_{45^\circ} = K \left(\frac{Q^u}{n} \right) ; Q_{45^\circ}^u = \rho \times h \times A_{45^\circ}$$

$$K^{37} = \frac{0,400}{\sqrt{2}} ; K^{52} = \frac{0,300}{\sqrt{2}} ; K^{60} = \frac{0,270}{\sqrt{2}}$$

$$\rho_{37} = \frac{\sqrt{2}}{0,400} ; \rho_{52} = \frac{\sqrt{2}}{0,300} ; \rho_{60} = \frac{\sqrt{2}}{0,270}$$

BARE RIDICATE LA α°

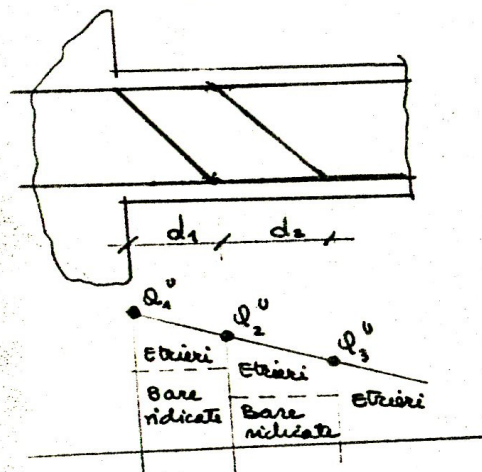
$$A_\alpha = K \left(\frac{Q^u}{n} \right) ; Q_\alpha^u = \rho \times h \times A_\alpha$$

$$K^{37} = \frac{0,400}{(\sin \alpha + \cos \alpha)} ; \rho^{37} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)}{0,400}$$

$$K^{52} = \frac{0,300}{(\sin \alpha + \cos \alpha)} ; \rho^{52} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)}{0,300}$$

$$K^{60} = \frac{0,270}{(\sin \alpha + \cos \alpha)} ; \rho^{60} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)}{0,270}$$

CAZUL MIXT (ETRIERI ȘI BARE RIDICATE)



Se determină forța tăietoare ultimă, preluată pe intervalele $d_1, d_2, \dots$ prin bare ridicate cu relație de forma:

$$Q_\alpha^u = \rho \times h \times A_\alpha$$

- sistemul de etrieri rezultă din diferența de forțe tăietoare:

$$Q_e^u = Q^u - Q_\alpha^u ; A_e = K \frac{Q_e^u}{n}$$

VERIFICAREA CAPACITĂȚII DE REZISTENȚĂ
LA FORȚA TĂIETOARE CU FORMULA
EMPIRICĂ JAPONEZĂ.

⊕ CAZUL GRINZILOR UNGI CU $\lambda > 5$.

$$Q_{min}^u = \left[\rho_b \sqrt[4]{M\%_a} + \rho_e \sqrt{M\%_w} \right] \times 0,8 A_b.$$

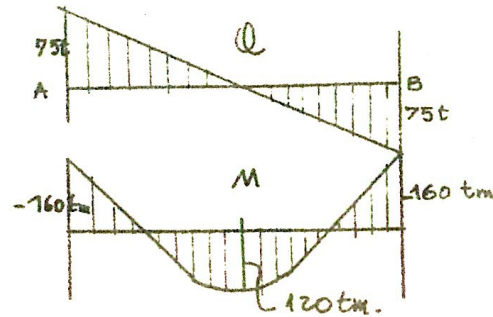
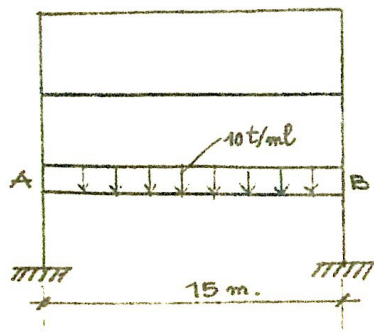
$$\rho_b = \begin{cases} 7,3 & \text{pentru B300} \\ 6,6 & \text{pentru B250} \\ 5,9 & \text{pentru B200} \end{cases} \quad \text{PARTICIPAREA BETONULUI.}$$

$$M\%_a = \frac{A_a \times 100}{b \times h} = \text{procentul de armare al armăturii întinse.}$$

$$\rho_e = \begin{cases} 14,4 & \text{pt. etrieri din DB 37} \\ 17,0 & \text{pt. etrieri din PC 52.} \end{cases}$$

$$M\%_w = \frac{A_s \times 100}{a \times b} = \text{procentul de armare al armăturii transversale.}$$

EXEMPLU : GRINDĂ DE CADRU TÎPIC GRAVITAȚIONAL.



COEFICIENTI DE SIGURANȚĂ.

Pentru încovoiere $c = 1,8$
Pentru forțe tăietoare $c = 2,2$
Secțiunea adoptată 60×125

DIMENSIONAREA LA ÎNCOVOIERE

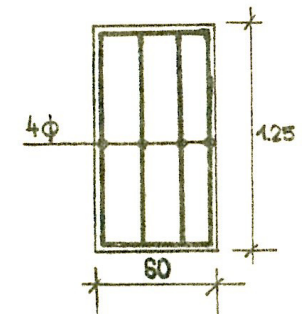
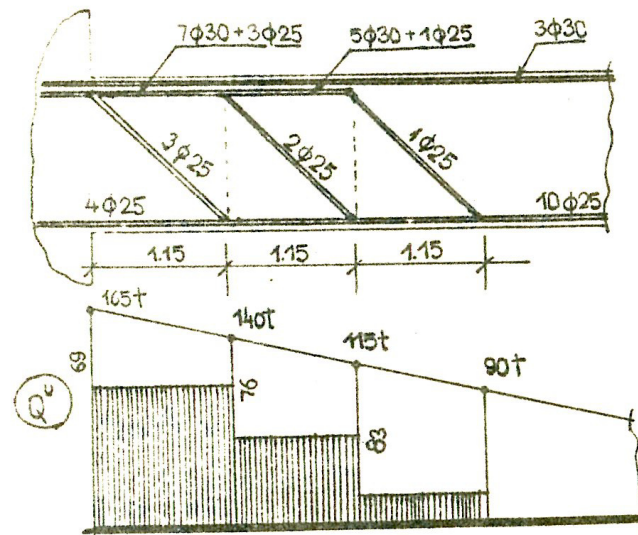
$$M_{+}^u = 1,8 \times 120 \quad \text{PC 60}$$

$$A_a = 0,27 \times \frac{1,8 \times 120}{1,25} = 46,7 \text{ cm}^2 \quad (10 \phi 25)$$

$$M_{-}^u = 1,8 \times 160$$

$$A_a = 0,27 \times \frac{1,8 \times 160}{1,25} = 62,2 \text{ cm}^2 \quad (7 \phi 30 + 3 \phi 25)$$

DISPOZIȚIA ARMĂTURII LONGITUDINALE.



FORTELE TAIE TOARE PRELuate DE BARELE RIDICATE :

- Intervalul cu 3 $\phi 25$:

$$Q^u = \left(\frac{\sqrt{2}}{0,27} \right) \times 1,25 \times 3 \times 4,92 = 96,6t \sim 97$$

- Intervalul cu 2 $\phi 25$: $Q^u = 64,4t \sim 64$

- Intervalul cu 1 $\phi 25$: $Q^u = 32,2t \sim 32$.

DIMENSIONAREA ETRIERILOR

Se asigură zona reazemului, circa $4 \times 1,15m$, cu etrieri dimensionați la răsucirea cea mai mare de $90t$. (69,76, 83,90).

$$a = 20cm.$$

$$h = \frac{125}{20} = 6,25$$

otel PC52.

$$A_e = 0,3 \times \frac{90}{6,25} = 4,32$$

SUFICIENT 4 $\phi 12$.

În partea centrală a grinzilor (c-ca 6m) se pot mări intervalele sau se poate micșora diametrul de la 12 la 10 m/m.

VARIANTA FĂRĂ BARE RIDICATE

$$a = 15,0cm ; m = 8,33.$$

- Intervalul 1 :

$$A_e = 0,3 \times \frac{165}{8,33} = 5,94cm^2$$

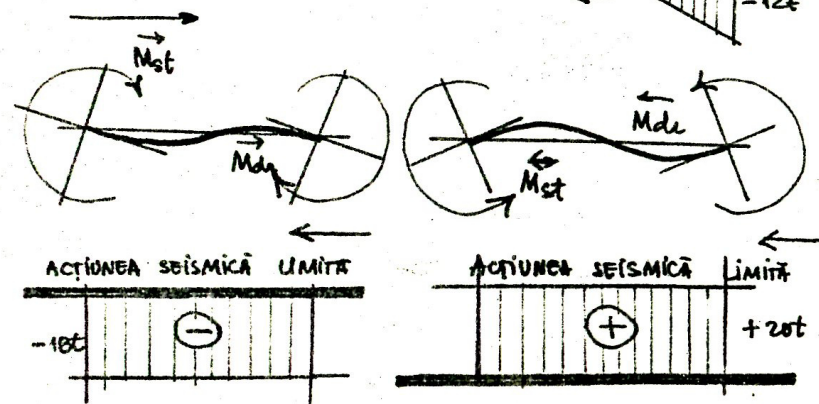
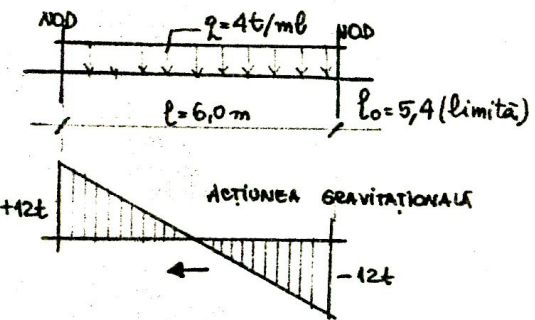
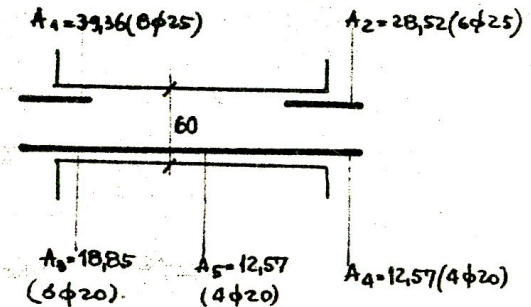
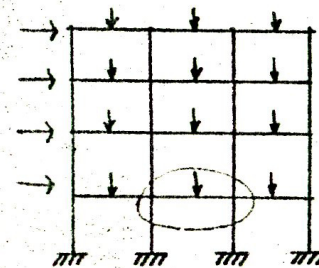
(4 $\phi 14$)

- Intervalul 2 :

$$A_e = 0,3 \times \frac{140}{8,33} = 5,04$$

(2 $\phi 14$ + 2 $\phi 12$, etc).

EXEMPLU : GRINDA DE CADRU ANTISEISMIC.



$$Q^u = \frac{M_{st} + M_{dr}}{l_0} \approx 18t$$

$$Q^u = \frac{M_{st} + M_{dr}}{l_0} \approx 20t.$$

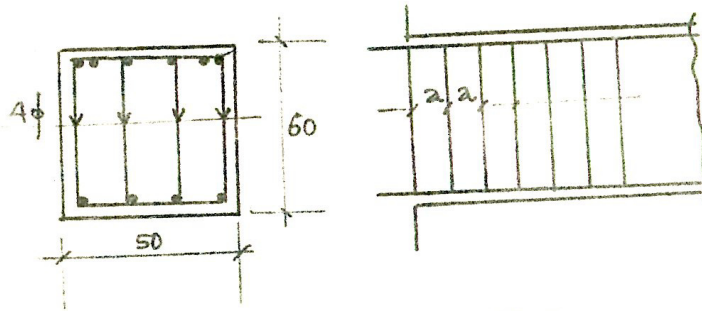
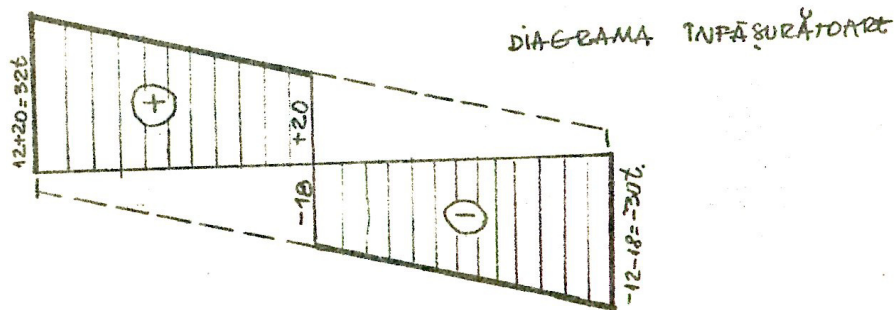
$$l_0 = 5,4.$$

-55-

$$A_a = 0,3 \cdot \frac{M^u}{h} ; \quad M^u = \frac{h}{0,3} \cdot A_a = 2 A_a ;$$

$$\vec{M}_{st} + \vec{M}_{dr} = 2 (A_3 + A_2)$$

$$\vec{M}_{st} + \vec{M}_{dr} = 2 (A_1 + A_4)$$



- În zona de nod

$$n = \frac{60}{12,5} = 4,8$$

acoperire 4 ϕ 10.

- În câmp

$$n = \frac{60}{20} = 3$$

suprafață 4 ϕ 10

$$a = 12,5$$

$$A_e = 0,4 \cdot \frac{Q^u}{n} = 0,4 \cdot \frac{32}{4,8} = 2,67$$

$$a = 20,0$$

$$A_e = 0,4 \cdot \frac{20}{3} = 2,67$$

-56-

Se distribuie etrierii între 12⁵ și 20 cm în trei zone.

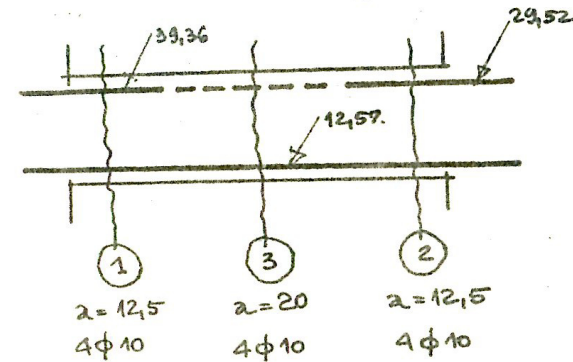
VERIFICAREA CU FORMULA EMPIRICĂ.

$$bh = 50 \times 60 = 3000 \text{ cm}^2.$$

$$\text{BETON} \dots \text{B300} \dots \dots \dots f_b = 7,3.$$

$$\text{OTEL} \dots \text{PC52} \dots \dots \dots$$

$$\text{ETRIERI} \dots \text{OL37} \dots \dots \dots f_e = 14,4.$$



$$\left(\mu \frac{\%}{a} \right)_1 = \frac{39,36 \times 100}{3000} = 1,31$$

$$\left(\mu \frac{\%}{a} \right)_2 = \frac{29,52 \times 100}{3000} = 0,98$$

$$\left(\mu \frac{\%}{a} \right)_3 = \frac{12,57 \times 100}{3000} = 0,42$$

$$\left(\mu \frac{\%}{a} \right)_{1,2} = \frac{4 \times 0,785 \times 100}{12,5 \times 50} = 0,50$$

$$\left(\mu \frac{\%}{w} \right)_3 = \frac{4 \times 0,785 \times 100}{20 \times 50} = 0,31.$$

$$(Q_{\min}^u)_1 = \left[7,3 \sqrt[4]{1,31} + 14,4 \sqrt{0,50} \right] \times 0,80 \times 3000 =$$

$$= (7,8 + 10,2) \times 2,4 = 43,2 t > 32 t.$$

$$(Q_{\min}^u)_2 = \left[7,3 \sqrt[4]{0,98} + 14,4 \sqrt{0,50} \right] \times 0,80 \times 3000 =$$

$$= (7,3 + 10,2) \times 2,4 = 42 > 30 t.$$

$$(Q_{\min}^u)_3 = \left[7,3 \sqrt[4]{0,42} + 14,4 \sqrt{0,31} \right] \times 0,80 \times 3000 =$$

$$= (5,9 + 8,0) \times 2,4 = 33,4 > 20 t.$$

Sistemul de armare adoptat în baza analizei cu grinda politriangulată este acoperitor; el poate fi moderat mărit distanța dintre etrieri sau diametrul etrierilor ($\alpha, \phi_e \dots$)

4. COMPRESIUNE CU ÎNCOVIERE COMPRESIUNE EXCENTRICĂ

2. Elemente de structură verticale

Solicitarea de compresime cu încoviere, sau pe scurt compresimea excentrică (M, N), apare aproape inevitabil în elementele verticale ale structurilor de rezistență. Ea poate avea loc în două situații esențial diferite:

- Incoviere pură și compresime (M, N)
- Incoviere cu forță tăietoare și compresime ($M+Q, N$).

În acest din urmă caz efectul încovierii și compresimii se asociază într-o solicitare de compresime excentrică (M, N) iar efectul forței tăietoare se tratează separat (Q).

Această grupare a componentelor ascunde o contradicție și amănă:

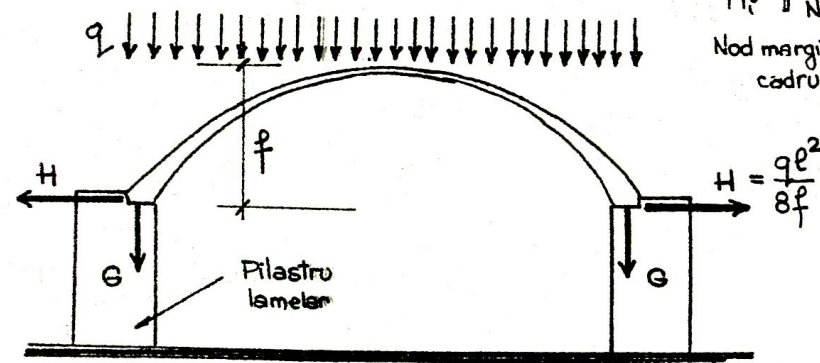
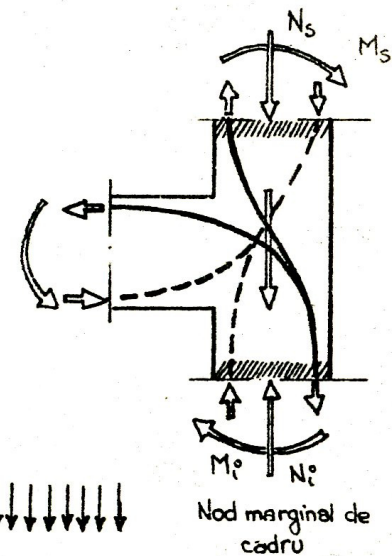
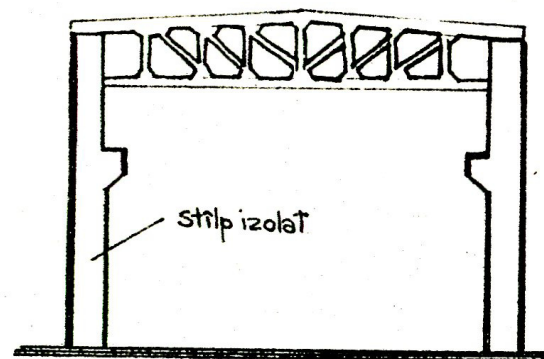
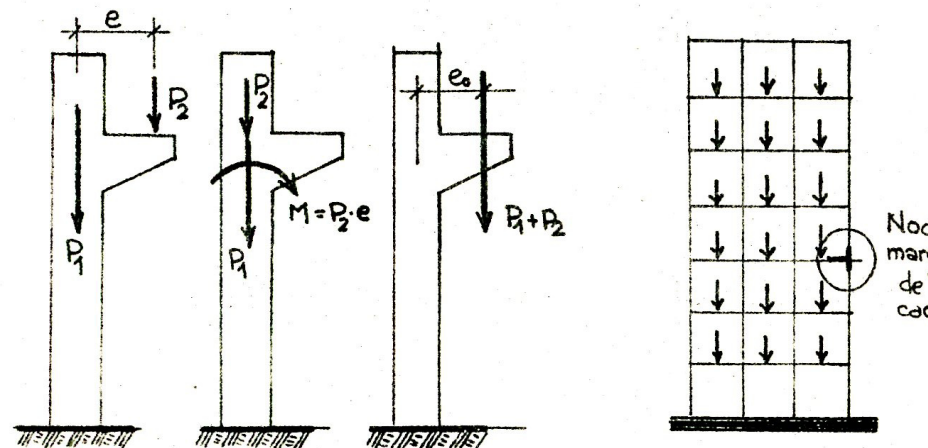
- (1) pe de-o parte încovierea și compresimea generează eforturi normale și asocierea lor este firească;
- (2) pe de altă parte izolarea forței tăietoare de încoviere și de compresime sârăcește fenomenul de adevărată interacțiune care au loc între cele trei componente care în cazul betonului armat și al materialelor mixte sunt decisive.

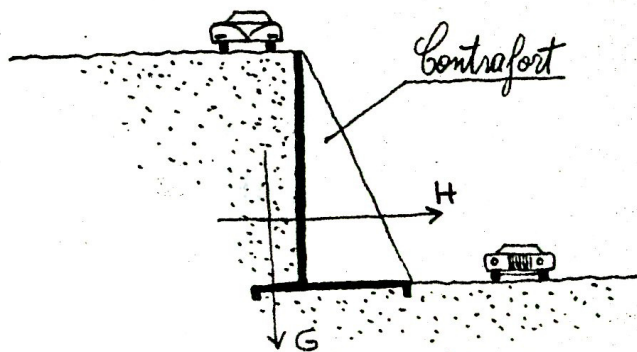
Metodologia care va fi aplicată în studiul acestei solicitări / dozebit de importante va căuta să împace lucrurile. În acest sens cele două grupări de componente (M, N) și (Q) vor fi tratate separat pe baza unor metode simple iar interacțiunea dintre ele va fi introdusă ca o verificare finală cu ajutorul unor relații empirice obținute din analiză și experiență (naturală și de laborator).

Principalele elemente de structură și complexe structurale care intervin în osatura verticală a structurilor de toate tipurile sunt:

- Stâlpi ; Pilastri ; Contraforți
- Cadre
- Diafragme cu goluri
- Diafragme pline
- Cadre diafragme
- Bare tubulare
- Miezuri diafragmate (sîmburi)

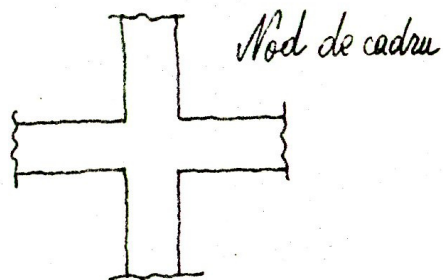
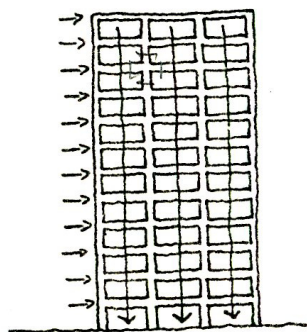
STILPI , PILASTRI , CONTRAFORTI



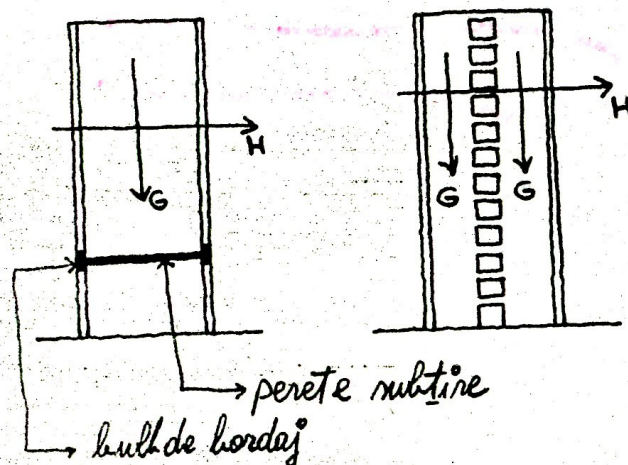


H = împingerea pământului
 G = sarcina verticală din greutate proprie și greutatea pământului.

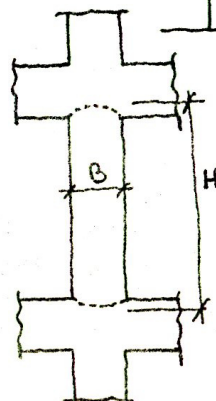
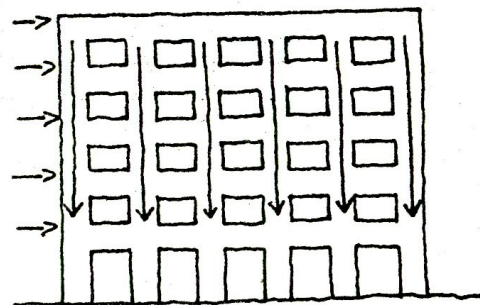
Cadru = ansamblu de grinzii (rigle) și stâlpi legați la intersecții prin "noduri de cadru" rigide.



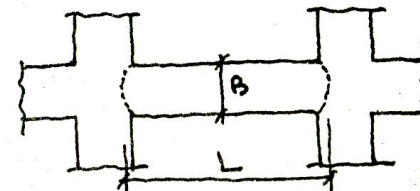
Diafragmă = perete subțire cu sau fără buclii și rigidizare pe contur.



Cadru diafragmă = cadru în care grinzile și stâlpii au criteriul geometric $\lambda = \left(\frac{H}{B}\right)$ mai mic de $2 \div 2,5$ (grinzii medii).



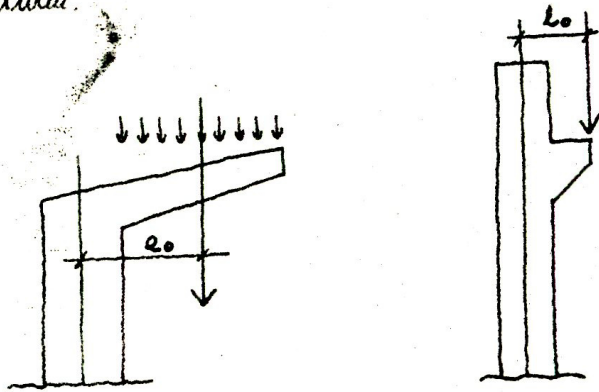
$$\lambda = \left(\frac{H}{B}\right) < 2 \div 2,5$$



$$\lambda = \left(\frac{L}{B}\right) < 2 \div 2,5$$

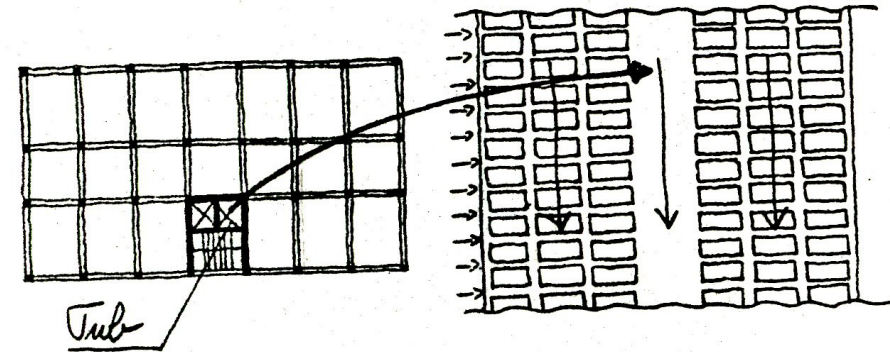
APARIȚIA COMPRESIUNII EXCENTRICE

- Apariția compresiei excentrice pure este datorată aplicării cu excentricitatea e_0 a forțelor paralele cu axul elementului.

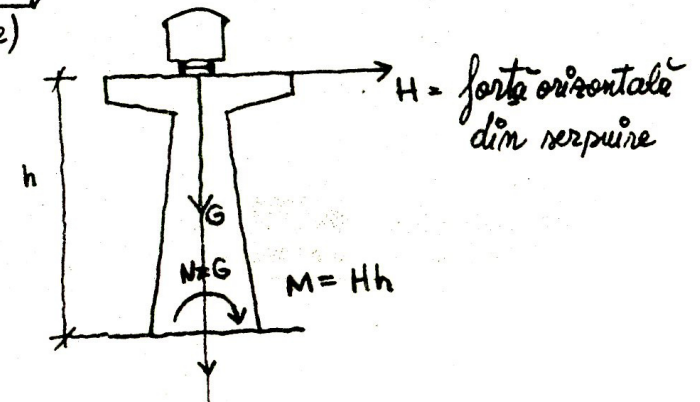
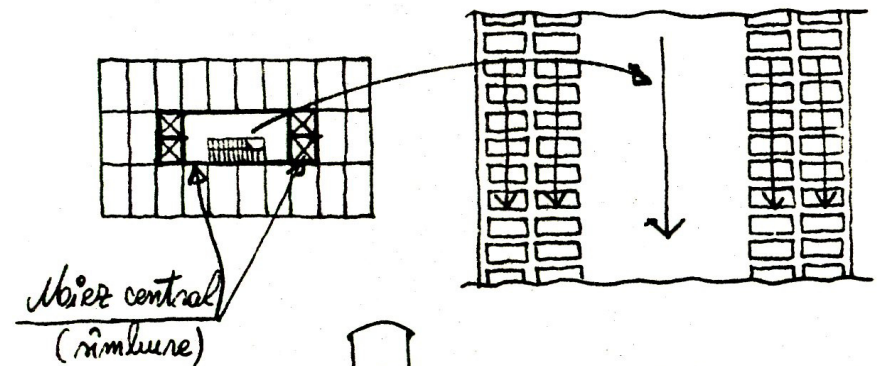


- Compresiunea excentrică cu forță tăietoare ia naștere ori de câte ori peste compresiunea centrică sau excentrică definită mai sus se suprapune efectul de încovoiere cu forță tăietoare a unor acțiuni orizontale.

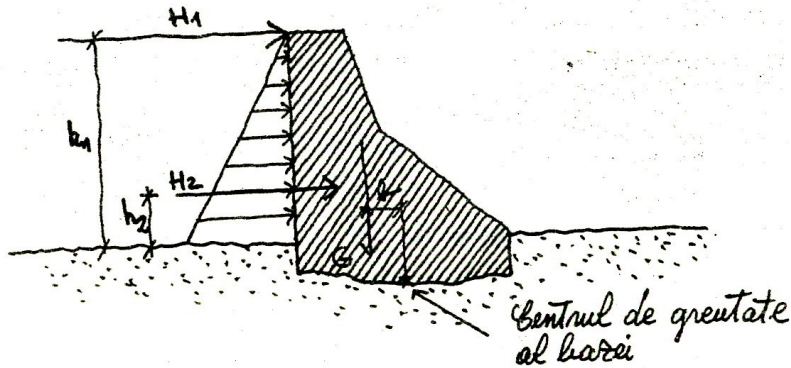
Tub (bară tubulară) = element structural constituit din peretii zonei destinate pentru lifturi, scări, ghene; participă alături de alte elemente la preluarea acțiunilor orizontale.



Obiez (rîmbure) = complex structural format din diafragme legate monolit între ele și dispuse cel puțin după două direcții conceput în mod special pentru preluarea acțiunilor orizontale.



- În majoritatea cazurilor efectul de compresiune excentrică se obține în același timp din forțe paralele cu axul barei și transversale sau oblice.



$$T = H_1 + H_2$$

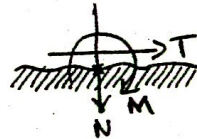
$$N = G$$

$$M = H_1 h_1 + H_2 h_2 - G b$$

$$H_1 = \text{împingerea gheții}$$

$$H_2 = \text{presiunea apei}$$

$$G = \text{greutatea marelui}$$



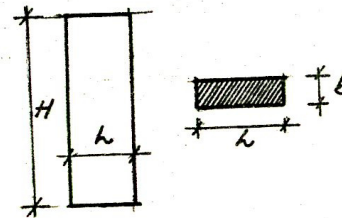
3. Despre dimensionarea elementelor verticale (Elemente introductive)

Dimensionarea corectă a stlpilor, coloznelor, pilastriilor, lamelor se obține din corelarea arhitectural-ingenierescă a criteriilor geometrice care definesc dimensiunile vizibile

$$\lambda_1 = \frac{h}{H} ; \lambda_2 = \frac{b}{H}$$

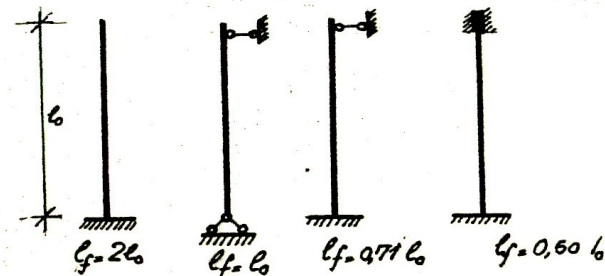
$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

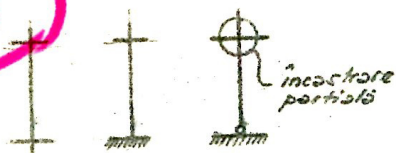
unde H, h, b : dimensiunile vizibile



- Principalele elemente care determină slăbirea criteriilor
la vînt :
1. Rigiditatea tipului de rezemare la capete
 2. Posibilitățile de deplasare relativă orizontală a capetelor
 3. Regimul de încercare
 4. Aspectul plastic, arhitectural

Fiind vorba de o "compresiune", "excentrică", pericolul flambajului trebuie avut în vedere. Ori, rigiditatea lașării la capete este un parametru esențial în stăruirea acestui pericol. Prin studiul obic, axial, al flambajului barei drepte s-a obținut efectul rigidității lașurilor de la capete prin conceptul de lungime de flambaj $l_f = \mu l$





$l_f = \alpha l_0$
unde α este funcție de
rigiditatea încadrării parțiale

Tratarea siguranței la flambaj a stîlpilor de beton armat diferă de la prescripție la prescripție. Ne vom opri asupra iderilor acceptate în țara noastră adică cu introducerea concepției de calcul „la rușine”

a. Cazul stîlpilor comprimați centric.

Se mărește capacitatea portantă centrică printr-un coeficient subunitar φ , funcție de zveltatea elementului.

l_f/b	14	16	18	20	22	24	26	28	30
l_f/D	12,1	13,9	15,6	17,3	19,1	20,8	22,5	24,3	26
l_f/i	50	55,4	62,2	69,0	76,0	83,0	90,0	97,0	104
φ	1	0,88	0,80	0,73	0,67	0,62	0,57	0,53	0,50

unde:

b : dimensiunea mică a secțiunii

D : diametrul secțiunii circulare inscrise

i : raza de girație

b. Cazul stîlpilor comprimați excentric

Se mărește excentricitatea printr-un coeficient supraunitar

η funcție de zveltatea elementului $(\frac{l_f}{h})$ și intensitatea comprimării centrice $s = \frac{N_0}{R_c}$.

$$\sigma_0 = \eta \sigma_c \quad \sigma_c = \frac{N_u}{M_u} \quad \eta = \frac{1}{1 - (\frac{s}{4800}) \cdot (\frac{l_f}{h})^2}$$

Acum în procesul de încărcare există posibilitatea unor deplasări orizontale importante, pericolul apariției fenomenului de pierdere a stabilității se accentuează deoarece se dezvoltă momente suplimentare.

Regimul de încărcare poate fi privit din mai multe puncte de vedere; ne vom opri numai asupra unuia din ele care este de primă importanță:

- Regim static
- Regim dinamic (într-un singur sens, alternativ, șteatoriu).

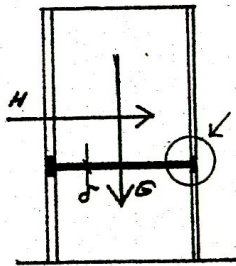
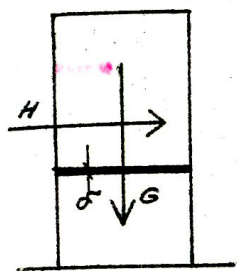
În cazul regimului static de încărcare proprietățile elementului sînt determinate din considerente de rezistență și stabilitate (flambaj); în cazul unui regim dinamic de încărcare intervine în plus necesitatea asigurării deformabilității postelastice (ductilitate) care poate influența eventual criteriile.

Principalele aspecte de practică arhitecturală care intervin în proiectarea elementelor verticale expuse vederii (neacoperite de elemente nestructurale) sînt:

- "zveltatea" urmărită prin concepție
- dimensiunile, forma și proporțiile secțiunii transversale
- constanța sau variabilitatea secțiunilor transversale pe înălțime
- Tratarea capetelor (articulate, cu capitel, cu vute, etc.).

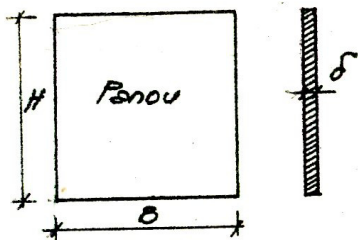
Combaterrea acestor forme de instabilitate impune introducerea unor elemente speciale de rigidizare.

- Îngroșări locale cu moment de inerție pe direcția perpendiculară peretelui. La clădirile multietajate din diafragme aceste legături transversale sînt oferite în mod natural de planșee (ca legături fixe).
- rigidizarea conturului cu elemente de bordaj.



Bulb de rigidizare
(bordaj, talon)

C. Îngroșarea inimii din considerente de stabilitate



$$\lambda_1 = \left(\frac{\delta}{H} \right)$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{\delta}{B} \right)$$

Raportele λ_1 și λ_2 sînt funcții de rigidizarea conturului prin bordaje și legături fixe (planșee)

Se constată că o soluționare unitară a aspectelor arhitecturale în afara criteriilor de rezistență, rigiditate, deformabilitate, în proiectarea elementelor de structură verticale nu este posibilă.

4. Sollicitările componente ale compresiei excentrice

Rezistența ultimă a unui stîlp de beton simplu la sollicitarea de compresie centrică se obține din relația:

$$N_0 = A_b \cdot R_c$$

Ruperea este determinată de zdrobirea betonului și are un caracter casant.

Dacă stîlpul considerat este armat cu bare longitudinale și etrieri, relația de mai sus se completează cu participarea armăturii la preluarea încărcării axiale:

$$N^U = A_b \cdot R_c + A_s \cdot \sigma^Y$$

Tipul rupei depinde de densitatea și cantitatea etrierilor. În cazul etrierilor obișnuiți, ruperea este relativ casantă, apropiată de cea a stîlpului de beton simplu. Armătura atinge curgerea înaintea zdrobirii betonului deoarece:

$$\epsilon_s^Y < \epsilon_b^U$$

Rezistența ultimă a unei grinzi de beton simplu la încovoiere pură este foarte redusă:

$$M^U = \left(\frac{bh^2}{3,6} \right) \cdot R_t$$

$$R_t \approx \frac{1}{10} R_c$$

Ruperea este determinată de betonul întins și are un caracter carent, exploziv.

Dacă introducem armătură în zona întinsă obținem grinda de beton armat, studiată anterior.

Tipul rupei este influențat de cantitatea de armătură întinsă (μ), de limita de curgere a oțelului (σ_s), de rezistența și deformabilitatea betonului la compresie (R_c, ϵ_b^u):

- Dacă curgerea armăturii precede zdrobirea betonului, procesul de rupere este plastic, ductil.
- Dacă zdrobirea betonului precede curgerea armăturii, ruperea are un caracter carent (cazul vecinilor saturați cu armătură).

Dacă grinda este armată simetric la întindere și la compresie, rolul betonului este secundar în determinarea tipului de rupere; în cazul unor procente de armare moderate se obține o rupere foarte ductilă.

Efectele de ansamblu ale suprapunerii dintre compresiunea centrică și încovoierea pură

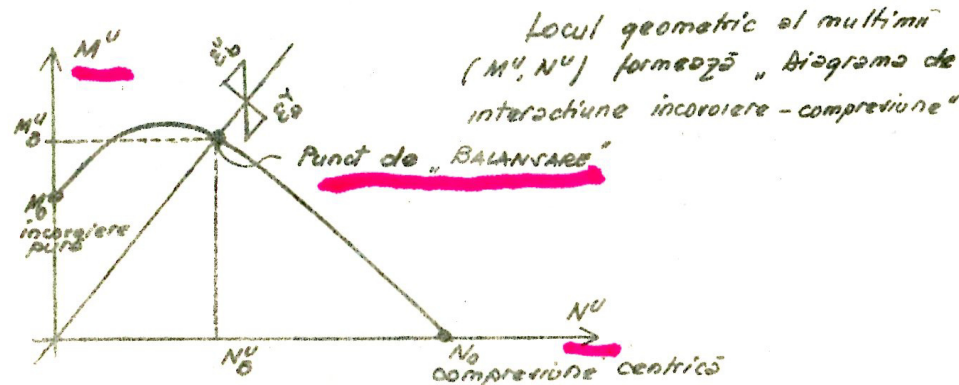
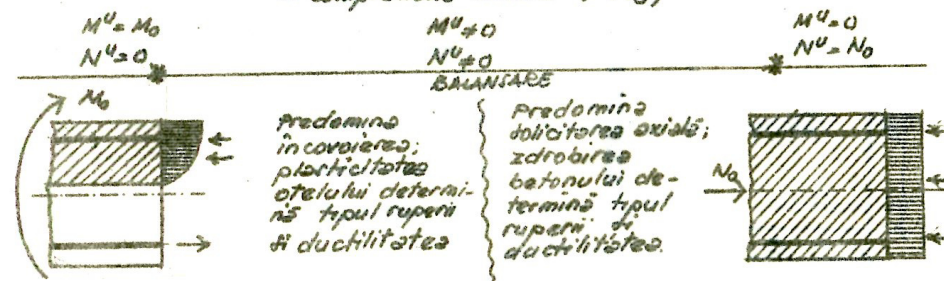
Principalele efecte se întind direct:

- Pentru valori moderate ale forței axiale, compresiunea întărește operația „curgerii” în zona întinsă; are loc un efect de „precompresiune” care are ca rezultat creșterea momentului în raport cu momentul de încovoiere pură. Tipul rupei este dominat de plasticitatea oțelului (ϵ_s^u).
- Pentru valori importante ale forței axiale, compresiunea din încovoiere suprapusă cu compresiunea din forță axială grăbește zdrobirea betonului; avem o scădere de moment în raport cu creșterea forței axiale. Tipul rupei este dominat de fragilitatea betonului.

Se întinde existența unei soluțiuni de graniță între cazurile a) și b) - în care ambele materiale ale asociației „beton - oțel” își ating simultan deformările limită (ϵ_s^u și ϵ_b^u); aceasta este granița de BALANSARE, între cele două soluțiuni participante.

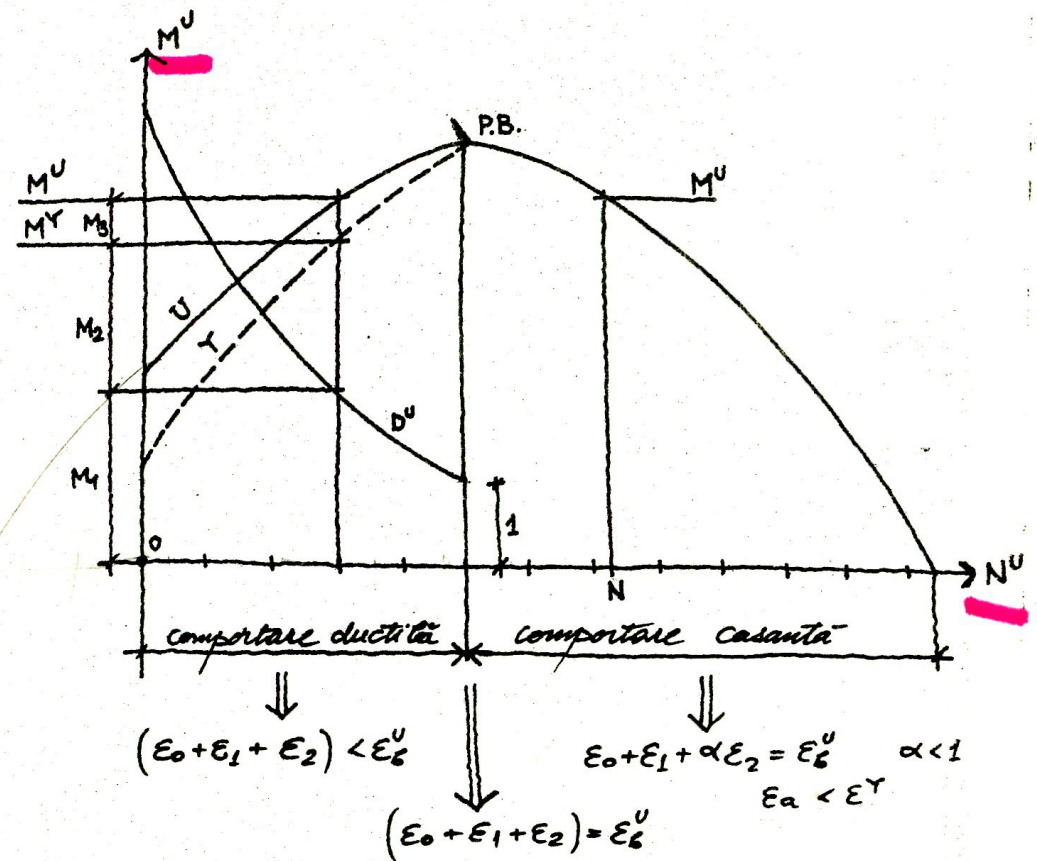
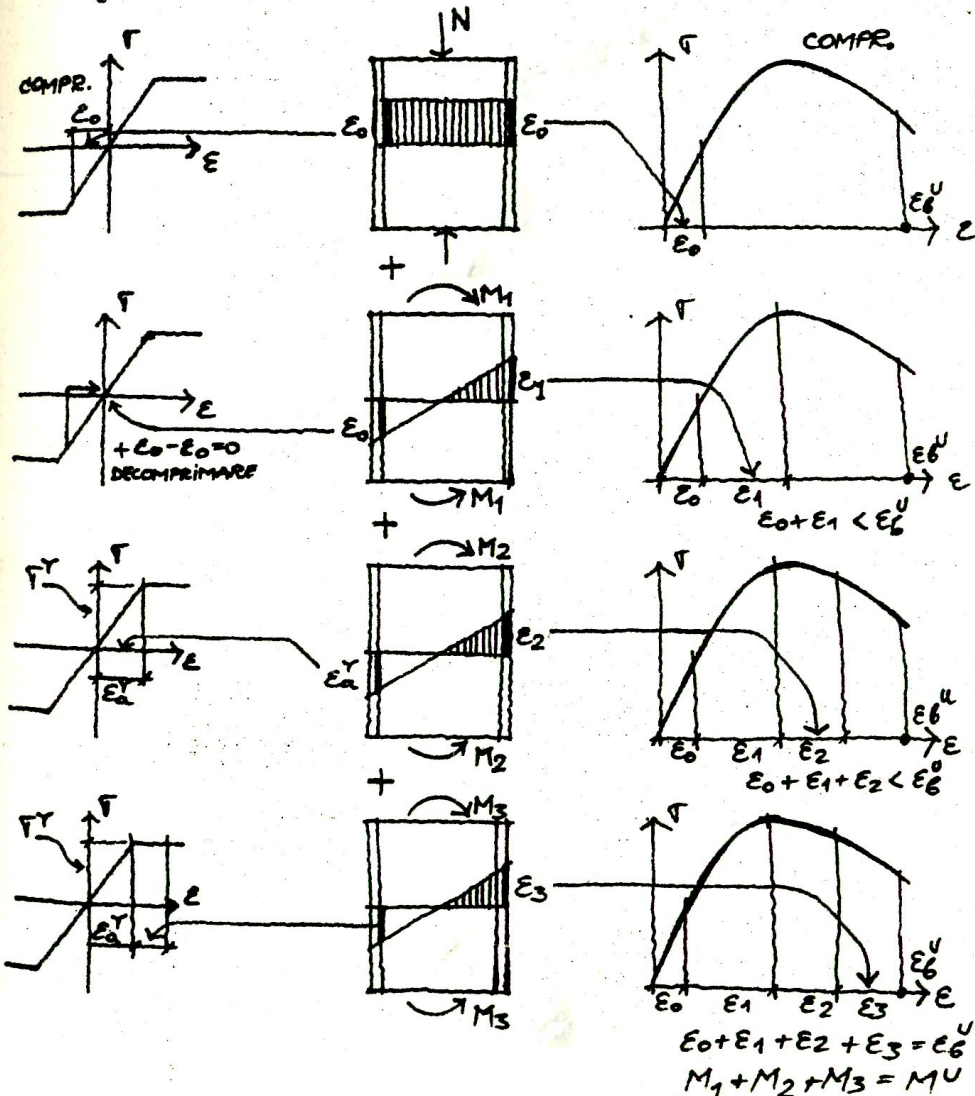
Este evident că există o infinitate de valori asociate (M^u, N^u) care conduc vecinul în stadiul ultim; ele se înscriu între cele două limite definite anterior:

- încovoiere pură (M_0)
- compresiune axială (N_0)



Superpoziția încovoiere - compresiune conduce întotdeauna la măsurarea ductilității deoarece compresiunea inițială grăbește atingerea deformărilor limită a betonului.

Comportarea la compresime excentrică este deosebit de interpretativă și poate fi urmărită pas cu pas în diferite situații fără dezvoltări teoretice. Deasemenea semnificatia diagramei de interacțiune și a ductilității la compresime excentrică pot fi intuite direct cu toate substituțiile lor (Fig. și Fig.).



Armătura curge
înaintea zdro-
birii betonului

(Balansare)

$$M^T = M^U$$

$$\omega^T = \omega^U$$

$$D = \frac{\omega^U}{\omega^T} = 1$$

Betonul se zdrobeste
înaintea atingerii
limitei de curgere
în armătura întinsă

Interpretări pe marginea diagramei de
interacțiune M-N-D.

Capacitatea ultimă la încovoiere în prezența unei forțe axiale

Tratare simplificată bazată pe adoptarea diagramei
"bloc dreptunghiular" în zona comprimată.

Această teorie se aplică în România sub diferite
forme, din 1950. Se disting două cazuri:

Cazul 1. Excentricitate mare, predomină încovoierea ($l_0 = \frac{M^0}{N^0}$):

- tipul rupei este relativ ductil

- în stadiul ultim ambele armături (A_a și A_a')

ating curgerea iar betonul se rupe din compresiune
prin încovoiere

Cazul 2. Excentricitate mică, predomină compresiunea

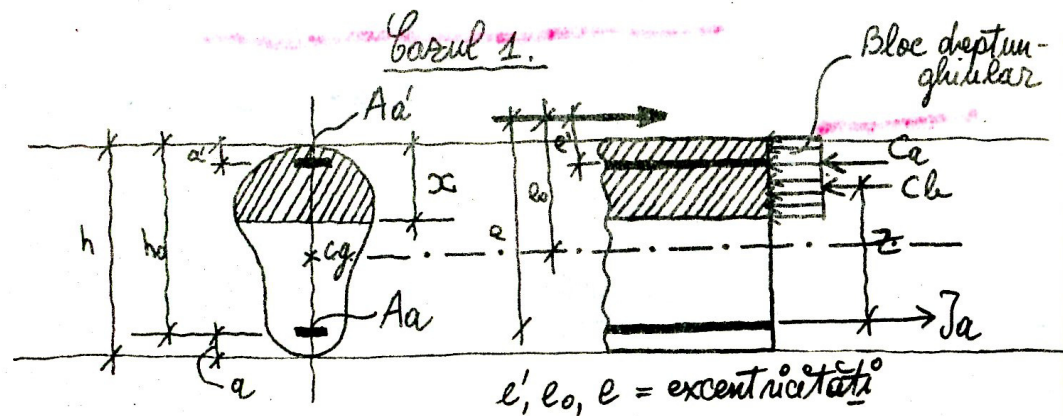
- tipul rupei este relativ casant, apropiat de
ruperea stâlpilor comprimați centric

- rezistența preponderantă a betonului la compresiune se apropie de valoarea obținută în prisme și
cilindri (R_c)

- armătura puternic comprimată ajunge la curgere

- armătura opusă forței excentrice este ușor comprimată sau ușor întinsă și în general nu ajunge la curgere.

Secțiunea oarecare Condiții de echilibru



$$N^0 = C_b + C_a - J_a \quad (1)$$

$$N^0 e = C_b x z + C_a (h_0 - a') \quad (2)$$

Aceste relații rămân în vigoare cit timp $z < h_0 - a'$,
situație care asigură curgerea armăturii comprimate;
dacă însă $z > h_0 - a'$, atunci ecuația de momente (2)
se ia în raport cu armătura comprimată (3):

$$N^0 e' = J_a (h_0 - a')$$

Cazul 2

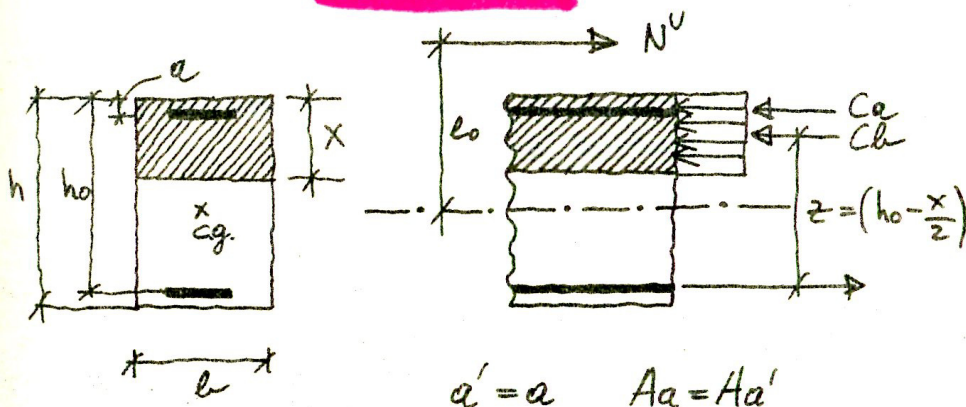
Fără o ipoteză geometrică de deformare a secțiunii de tipul ipotezei rectunghiilor plane acest caz nu poate fi soluționat decît empiric. Se admite în baza rezultatelor experimentale că participarea

betonului este constantă și egală aproximativ cu $0,8 \delta_0 R_c$, unde δ_0 este momentul static al secțiunii transversale utile (h_0) în raport cu centrul de greutate al armăturii slab solicitate A_a . Momentul ansamblului de forțe interioare - exterioare se ia în consecință în raport cu centrul de greutate al armăturii slab solicitate (forța interioară necunoscută):

$$N^u = 0,8 \delta_0 R_c + C_a (h_0 - a') \quad (4)$$

Cu aceste 4 (patru) relații de echilibru pot fi soluționate cazurile uzuale din practică.

Secțiunea dreptunghiulară simetric armată



Cazul I

Este cel mai important caz de compresiune excentrică:

$$N^u = C_b + C_a - I_a \quad (1)$$

$$N^u e_0 = M^u = C_b \left(\frac{h}{2} - \frac{x}{2} \right) + I_a \left(\frac{h}{2} - a \right) + C_a \left(\frac{h}{2} - a \right) \quad (2)$$

unde $C_b = b x R_c$ și $I_a = C_a = A_a \cdot \sigma^r$

Din relația (1) se obține:

$$\xi = \frac{x}{h} = \frac{N^u}{b h R_c} = \frac{\frac{N^u}{b h}}{R_c} = \frac{\sigma_0}{R_c} = \lambda$$

$$\boxed{\xi = \lambda}$$

Criteriul „ λ ” este fundamental în proiectarea stîlpilor de beton armat în general; prin „ λ ” este caracterizată intensitatea sollicitării (eforturi și deformări) betonului din componenta N luată separat (compresiune axială). Dacă pe durata acțiunii exterioare avem $N = d (A = d)$, atunci capacitatea de rezistență la încovoiere (M^u) și de deformare rotațională (ductilitatea), vor depinde esențial de acest parametru inițial

Din relația (2) se obține:

$$M^u = \frac{b x R_c}{2} (h - x) + 2 A_a \sigma^r \left(\frac{h}{2} - a \right)$$

$$\frac{M^u}{M} = \frac{M^u}{\frac{b h^2}{6} R_c} = \frac{6 b x R_c (h - x)}{2 b h^2 R_c} + \frac{6 A_a \sigma^r (h - 2a)}{b h^2 R_c}$$

$$\frac{M^u}{\bar{M}} = 3\beta(1-\beta) + 6\beta k = 3\lambda(1-\lambda) + 6\beta k$$

unde $\beta = (1-2\alpha)$

$$k = \mu \frac{\sigma^y}{R_c}$$

$$M^u = (m_b + m_a) \bar{M} = m \bar{M}$$

$m_b = 3\lambda(1-\lambda)$ = participarea betonului la realizarea momentului ultim.

$m_a = 6\beta k$ = participarea armăturii la realizarea momentului ultim

$m = m_b + m_a$ = parametrul exploatarea secțiunii

Delimitarea dintre cazurile 1 și 2 se obține pentru $\lambda^* \approx 0,5$ care definește astfel limita aproximativă de balansare

O altă formă de exprimare pentru momentul ultim în cazul 1

Ecuația de echilibru (2) poate fi pusă sub o formă convenabilă de calcul:

$$M^u = N^u \left(\frac{h}{2} - \frac{x}{2} \right) + 2I_2 \left(\frac{h}{2} - x \right)$$

$$M^u = \left[N^u \left(\frac{1-\lambda}{2} \right) + \beta I_2 \right] \times h$$

Diagrama de interacțiune M-N-D

Cu elementele date mai sus poate fi construită diagrama de interacțiune pe intervalul: „încovoiere pură” — „compresiune centrică”. Pentru completarea acestei diagrame este necesar să se mai introducă două elemente importante în proiectare:

1. Fragmentul de diagramă corespunzător întinderii cu încovoiere (întindere excentrică)
2. Diagrama ductilității rotaționale la compresiune cu încovoiere între $\lambda=0$ și punctul de balansare luat aproximativ la $\lambda_{B1} \approx 0,5$.

După mai multe simplificări, compatibile cu scopul inițial propus, de a găsi procedee simple și interpretative de proporționare corectă a secțiunilor de beton armat, diagrama de interacțiune a fost construită ca în figura alăturată. Limitele diagramei de interacțiune sînt determinate de rezistența ultimă la compresiune centrică și întindere centrică luate ca urmare:

- Pentru rezistența ultimă la compresiune centrică,

$$N_c^u = A_b R_c + 2A_s \sigma^y$$

$$\lambda = \frac{N_c^u}{A_b R_c} = (1+2k)$$

$$k = \frac{A_s \sigma^y}{R_c}$$

- Pentru rezistența ultimă la întindere axială,

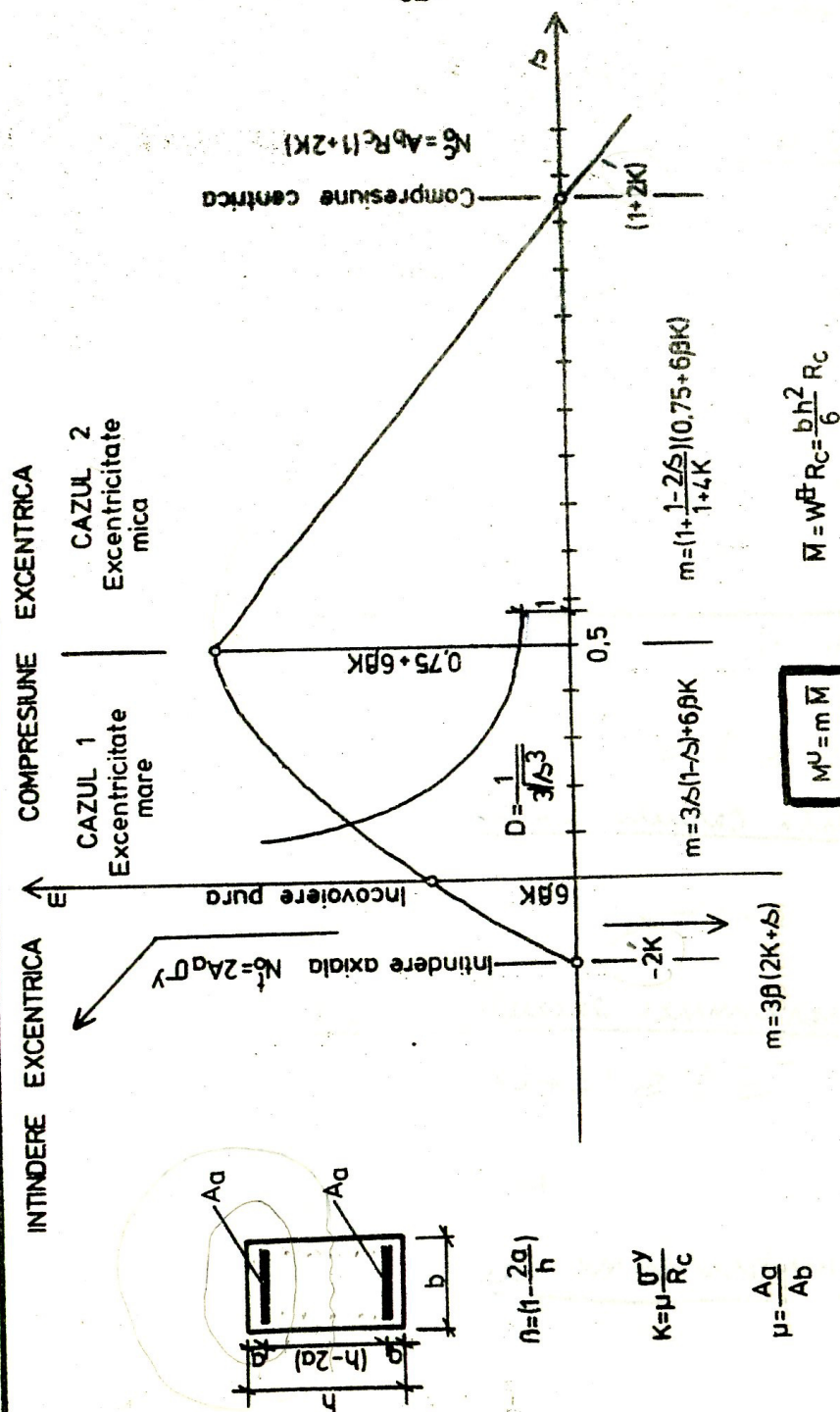
$$N_t^u = 2A_b \sigma^y$$

$$\lambda = -\frac{N_t^u}{A_b R_c} = -2k$$

Nota: În stadiul ultim
se neglijează participarea
betonului la preluarea
eforturilor de întindere

Ductilitatea rotațională în intervalul $0 \leq \lambda \leq 0,5$ se
determină cu o relație aproximativă de formă:

$$\delta \approx \frac{1}{3\sqrt{\lambda^3}}$$



Recapitulare

$$M^U = M \bar{M}$$

Intindere axială

$$\Delta = -2K$$

$$M = 0$$

Intindere excentrică

$$-2K \leq \Delta \leq 0$$

$$M = 3\beta(2K + \Delta)$$

Încovoiere pură

$$\Delta = 0$$

$$M = 6\beta K$$

Compresiune excentrică capul 1

$$0 \leq \Delta \leq 0,5$$

$$M = 3\Delta(1 - \Delta) + 6\beta K$$

Granița capului 1 - punctul de balansare

$$\Delta = 0,5$$

$$M = 0,75 + 6\beta K$$

Compresiune excentrică capul 2.

$$0,5 \leq \Delta \leq (1 + 2K)$$

$$M = \left(1 + \frac{1 - 2\Delta}{1 + 4K}\right)(0,75 + 6\beta K)$$

Compresiune centrată

$$\Delta = (1 + 2K)$$

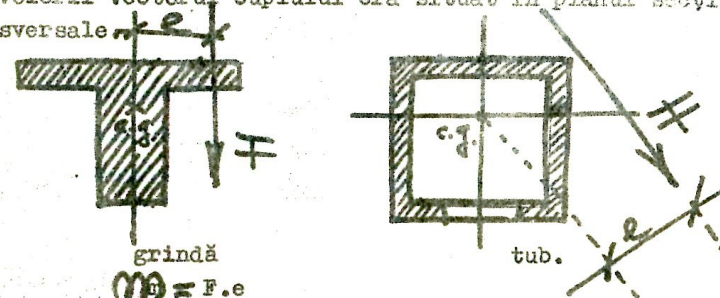
$$M = 0$$

5. DESPRE RĂSUCIREA ELEMENTELOR DE STRUCTURĂ DIN BETON ARMAT.

Efectul de răsucire.

- Răsucirea sau "torsiunea" elementelor de structură orizontale (grinzi, etc) sau verticale (tuburi, stâlpi, etc) este generată obișnuit de aplicarea "excentrică" a forțelor transversale în raport cu axul geometric (centrul de greutate al secțiunilor) Fig.

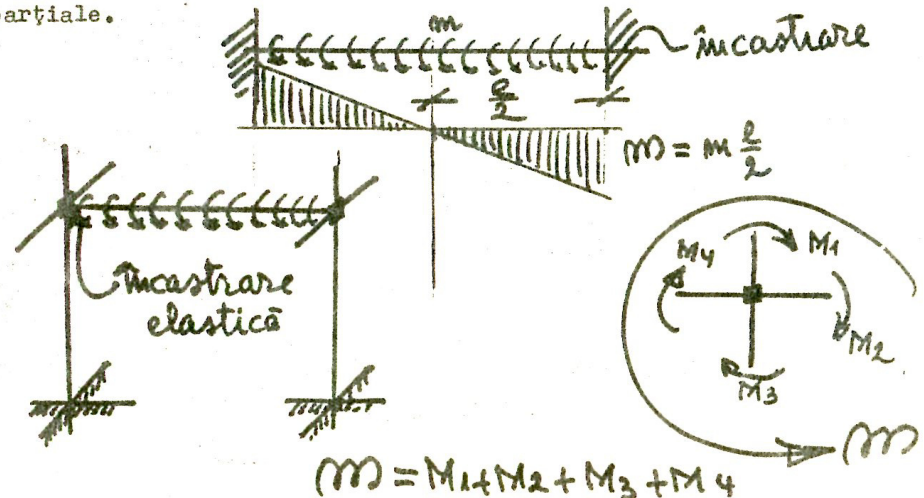
- În acest caz vectorul cuplului de torsiune se situează paralel cu axul geometric al elementului. Reamintim că în cazul încovoierii vectorul cuplului era situat în planul secțiunilor transversale.



- Ca importanță acest efect se situează alături de încovoierea cu forță tăietoare și compresiunea excentrică.

- Dacă forțele exterioare aplicate excentric sînt distribuite, $q(z)$, atunci ia naștere un moment de răsucire distribuit $m = q(z) \cdot e$ (tm/ml).

- În ambele cazuri (forțe concentrate sau distribuite) la capetele elementului torsionat sînt necesare legături și rezemări concepute în mod special pentru transmiterea momentelor de torsiune la alte elemente structurale prin încastrări fixe sau încastrări parțiale.



- Dacă aceste legări la capete nu sînt asigurate, stabilitatea mecanică a elementului este periclitată.

- Din Fig. se constată că momentele de torsiune transportate în nodurile unei structuri verticale (în cadre) se echilibrează prin momente încovoietoare în stâlpi și grinzi ; această remarcă are un caracter mai general.

- În capitolele privind teoria compunerii structurilor se va arăta că aceste efecte studiate la nivelul unui element sau complex structural se regăsesc într-o formă mai generală în solicitarea structurilor pe ansamblu.

- Forțele transversale care generează torsiunea elementului îl solictă automat și la încovoiere cu forță tăietoare ; este evident că cele două efecte trebuie considerate simultan :

$$\begin{array}{l} M \text{ ----- } \\ T \text{ ----- } \\ m \text{ ----- } \end{array} \quad \begin{array}{l} b \\ c \\ d \end{array}$$

- Tensiunile care iau naștere în secțiunile transversale din torsiune sînt de tip tangențial (τ). Aceste eforturi tangențiale se suprapun peste cele care iau naștere din forfecarea secțiunii prin forțe tăietoare : $\tau = \tau_i + \tau_n$

- Distribuția eforturilor tangențiale din răsucire și din forfecare este esențial diferită ; în consecință suprapunerea eforturilor τ implică cunoașterea (cel puțin aproximativă) a legilor de distribuție a acestor eforturi în secțiunile transversale.

- În cele ce urmează se vor da cîteva procedee aproximative pentru estimarea eforturilor unitare datorate răsucirii.

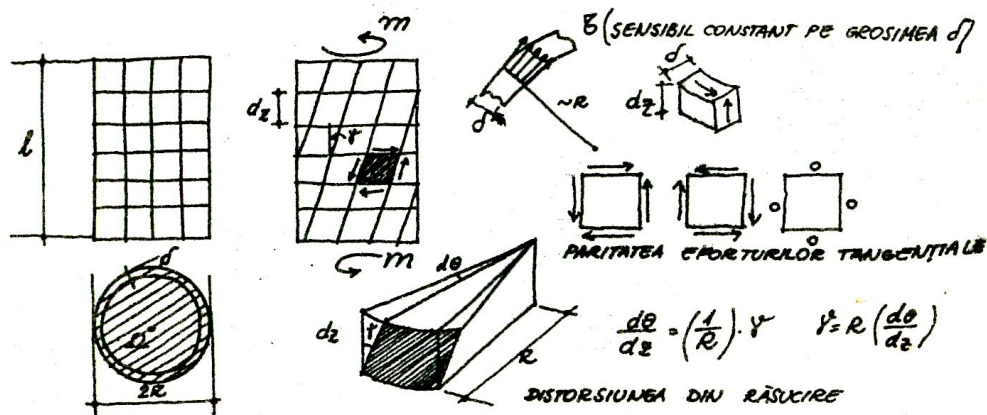
Sinteza unor rezultate obținute anterior.

a) Cazul tubului circular cu pereți subțiri (Fig.)

= efortul tangențial mediu pe grosimea pereților

$$\tau = \frac{M}{2\pi R^2 \delta} = \frac{m}{2\pi R \delta}$$

Aici ($2\pi R \delta$) are dimensiunea și semnificația unui modul de rezistență iar $\delta = \pi R^2$ reprezintă aria suprafeței marginite de circumferința tubului.



- Deformația unghiulară de forfecare pură rezultă din aplicarea legii lui Hooke:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{M}{2G\delta\delta}$$

- Rotirea specifică din torsiune se determină cu relația :

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{\gamma}{R} = \frac{M}{GI_0}$$

$I_0 = 2\delta\delta R$ = de natura unui moment de inerție.

b. Cazul barelor circulare pline (masive)

- Secțiunea plină circulară este singura care a putut fi analizată cu mijloacele elementare ale Rezistenței Materialelor.

Recapitularea celor trei studii. (fig.)

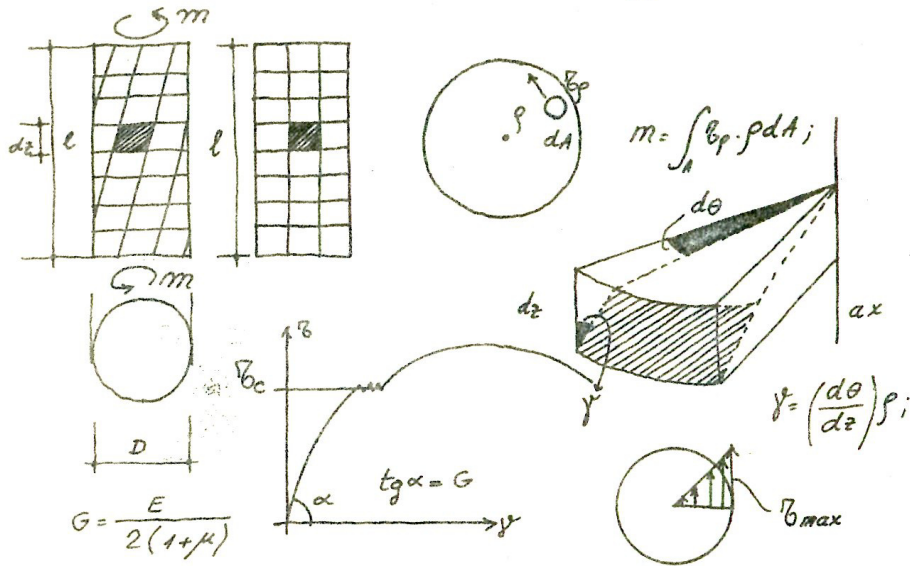
- Static (S) $M = \int_A \tau \cdot p \cdot dA$

- Geometric (G) (legea analitică de variație a deformațiilor unghiulare).

$$\gamma = \rho \left(\frac{d\phi}{dz} \right) = k \rho$$

- Fizic (F) (legea lui Hooke pentru deformații unghiulare).

$$\tau = G \cdot \gamma$$



Analiza a comportat trei studii (static,geometric, fizic) și sintezele care conduc la relațiile de calcul pentru eforturi (stare de tensiune) și deformații - deplasări (starea de deformare).

Sinteze. Relații de calcul.

Sinteza (G + F)

$$\tau = G \left(\frac{dt}{dr} \right) \cdot \rho = K' \rho \quad (\text{legea analitică de variație a eforturilor unitare } \tau).$$

Sinteza (G + F) + S

$$\frac{dt}{dt} = \frac{m}{G I_p} ; \theta = \frac{m \ell}{G I_p} ; I_p = \int_A \rho^2 dA \quad (\text{momentul de inerție polar}).$$

Relații de calcul.

Relatii de calcul.

Relații de calcul.

$$\tau = \frac{m}{I_p} \cdot \rho \quad \tau_{\max} = \frac{m}{W_p} \quad W_p = \frac{I_p}{R}$$

$$W_p \approx 0,20^3 \quad I_p \approx 0,10^4$$

Analiza efectului de răsucire pură pe cel mai simplu model de bară solicitată la răsucire (bara cu secțiunea circulară) a scos în evidență toate fenomenele răsucirii prin relații extrem de simple.

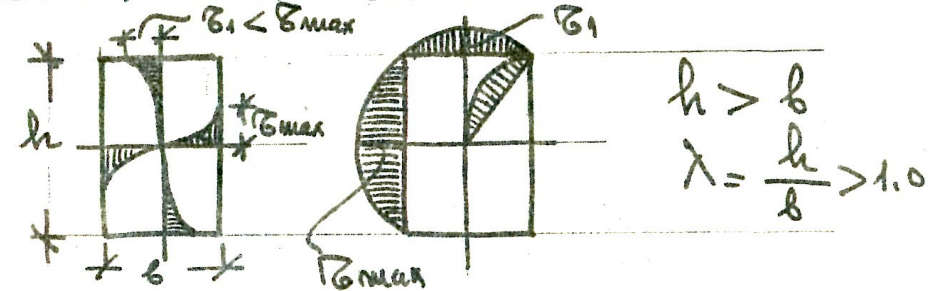
Aceste relații se pot generaliza în aceeași

formă pentru orice altă secțiune care prezintă interes practic.

Cazul secțiunilor specifice structurilor de beton armat.

1. Secțiunea dreptunghiulară.

Se dau rezultatele obținute cu mijloacele Teoriei Elasticității în funcție de proporțiile secțiunii transversale.



Momentul de inerție (convențional) de torsiune (I)

$$\gamma = k b^3 h \quad \frac{dt}{dt} = \frac{m}{G \gamma}$$

$\lambda = \frac{h}{b}$	1,0	1,2	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	10
K	0,14	0,17	0,20	0,21	0,23	0,25	0,26	0,28	0,29	0,31 1/2
K'	4,81	4,57	4,33	4,18	4,06	3,87	3,74	3,54	3,44	3,20 3

După CAQUOT :

$$\frac{1}{H} = (1 + \frac{1}{\lambda^2}) \left[(3,56 - 0,56 (\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1})^2) \right]$$

Efortul tangențial maxim :

$$\sigma_{\max} = K' \frac{m}{b^2 h} \quad \text{unde,}$$

$$K' = 4,81 - 1,81 \frac{\lambda - 1}{\sqrt{\lambda + 2}} \quad (\text{după CAQUOT})$$

Pentru o secțiune dreptunghiulară alungită cu suficientă
exactitate se poate lua :

$$\left(\frac{dt}{dt}\right) \approx 3 \left(\frac{m}{G b^3 h}\right); \quad \tau_{\text{max}} \approx \frac{3m}{b^2 h}$$

2. Secțiunea masivă oarecare.

Efortul tangențial maxim (τ_{max}) și rotirea specifică ($\frac{d\theta}{dx}$) pot fi determinate cu următoarele relații:

$$\tau_{max} = \alpha \frac{M}{A \cdot d} ; \frac{d\theta}{dx} = \beta \frac{M J_p}{G A^4}$$

unde, coeficienții α și β sînt dați în Tab.

A = aria secțiunii

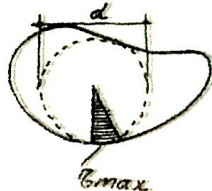
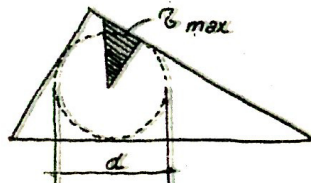
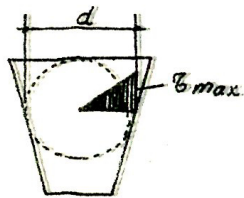
J_p = momentul de inerție polar al secțiunii în raport cu centrul său de greutate.

d = diametrul celui mai mare cerc care

poate fi înscris în cadrul secțiunii transversale Fig.

Restul notațiilor sînt cunoscute.

Forma secțiunii	α	β
Cerc, Elipsă	4,00	$4\pi^2 = 39,5$
Hexagon regulat	4,61	40,6
Octagon regulat	4,48	39,9
Triunghi echilateral	5,00	45,0
	$\lambda = 1,0$	4,31
	$= 1,5$	4,33
	$= 2,0$	4,06
	$= 2,5$	3,76
	$= 4,0$	3,54
	$= 5,0$	3,44
	$= 10,0$	3,20
	∞	3,00



3. Metoda aproximativă pentru calculul secțiunilor oarecare deschise.

Se descompune secțiunea în dreptunghiuri $b_i h_i$

(Fig.)

Pentru fiecare dreptunghi, caracteristica geometrică de rigiditate J_i se determină aproximativ ca pentru un dreptunghi foarte alungit.

Pentru secțiunea pe ansamblu: $J = \sum_{i=1}^n b_i^3 h_i$

- Momentul de răsucire se distribuie dreptunghiurilor componente proporțional cu rigiditatea lor geometrică J_i astfel :

$$M = M_1 + M_2 + \dots$$

$$M_1 = \left(\frac{J_1}{J} \right) \cdot M$$

$$M_2 = \left(\frac{J_2}{J} \right) \cdot M$$

...

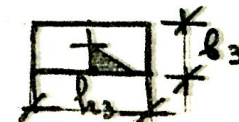
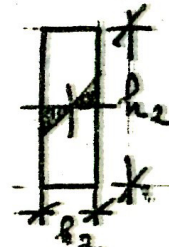
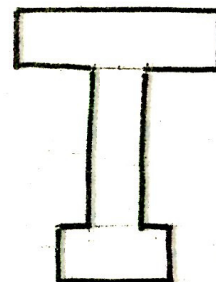
- Aceasta rezultă din condiția de coexistență a rotirilor specifice pentru profilul pe ansamblu și dreptunghiurile componente:

$$\left(\frac{d\theta}{dx} \right) = \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_1 = \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_2 = \dots$$

- Eforturile tangențiale maxime se determină ca pentru o secțiune dreptunghiulară alungită:

$$\tau_{i,max} = \frac{3 M_i}{b_i^2 h_i} \text{ sau } \tau_{i,max} = \left(\frac{M_i}{J_i} \right) \tau_i$$

$$b_i^2 h_i = \frac{3 J_i}{\tau_i} \text{ iar } M_i = \left(\frac{J_i}{J} \right) \cdot M$$



4. Cazul secțiunilor închise (tubulare) Fig.

- Caracteristica geometrică de rigiditate la torsiune se determină cu relația:

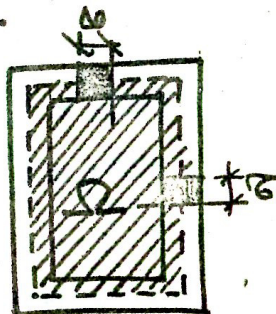
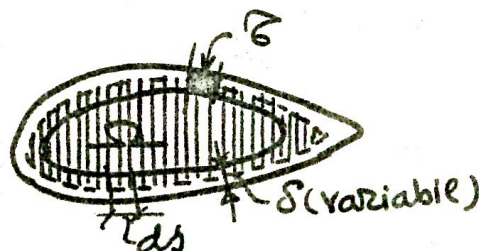
$$J = \frac{4\Omega^2}{\int \frac{ds}{\delta}} \text{ unde,}$$

Ω = aria cuprinsă în limitele liniei mediane a secțiunii transversale.

s = lungimea întregului contur median

ds = element de arc

δ = grosimea tubului într-un punct de pe contur (poate fi variabilă).



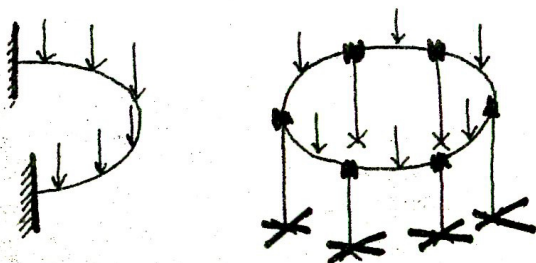
- Efortul tangențial τ se determină cu relația

$$\tau = \frac{M\delta}{2\Omega\delta}$$

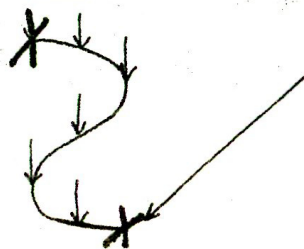
Interpretări. Aplicații.

1. Apariția torsiunii în structuri. Citeva exemple.

a) Grinzi curbe plane.

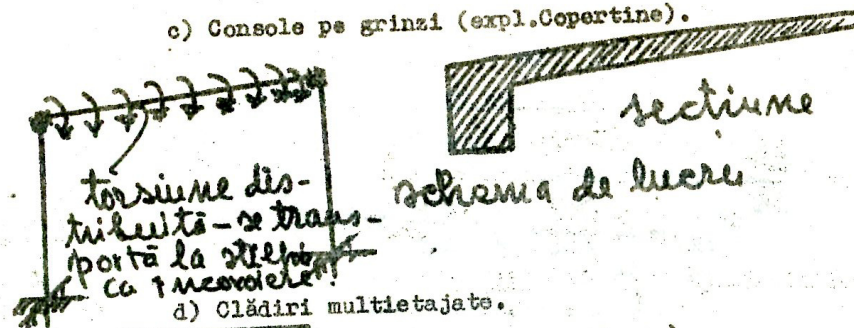


b) Grinzi strimbe în spațiu (expl. scări elicoidale)

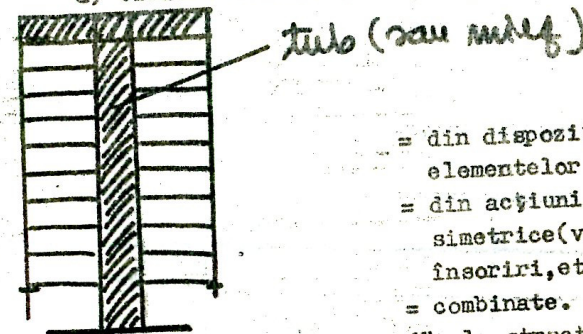


rezemare de torsiune,
încovoiere cu forță
tăietoare și efort
axial.

c) Console pe grinzi (expl. Copertine).



d) Clădiri multietajate.



= din dispoziția nesimetrică a elementelor verticale.
= din acțiuni orizontale nesimetrice (vânt, cutremur, însoțiri, etc).
= combinate.

e) Elementele de "bordaj" ale structurilor spațiale

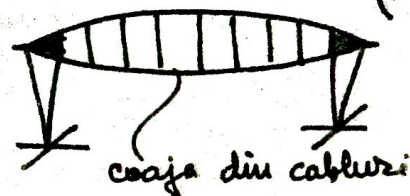
rezemate pe puncte izolate.

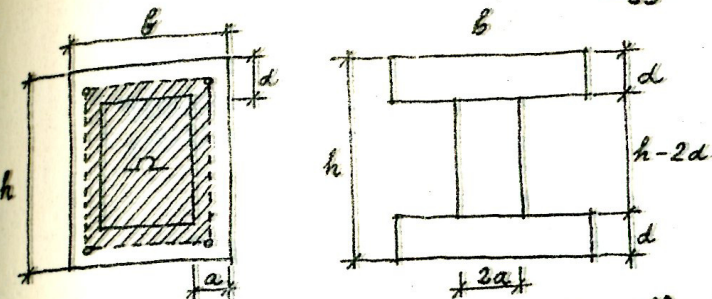
- Reducerea numărului de puncte de rezemare a structurilor curbe în plan, strimbarea structurilor în spațiu, dispoziția excentrică a elementelor verticale, aplicarea descentrată a forțelor exterioare naturale (vânt, cutremur) sau artificiale (pretensionare) sînt principalele surse de apariție a efectului de răsucire, de torsiune.

- Atenuarea efectului de răsucire implică în proiectare un proces de CENTRARE a forțelor în raport cu geometria structurii pe ansamblu și geometria secțiunilor transversale.

2. Secțiuni raționale pentru elementele răsucite.

- Elementul de structură cel mai rațional pentru efectul de răsucire este tubul cu pereți subțiri, eventual rigidizat local. Structurile de tipul barelor cu profil "deschis" au caracteristicile de rezistență și deformabilitate inferioare în aceleași condiții de gabarite și arii ale secțiunilor transversale.





$$\Omega = (b-a)(h-d); \quad \int_{\Omega} d\Omega = \frac{4\Omega^2}{3} = \frac{2(b-a)^2(h-d)^2}{3} \left(\frac{h-d}{a} + \frac{b-a}{d} \right)$$

$$4\Omega^2 = 4(b-a)^2(h-d)^2$$

$$J_I \approx 2 \frac{bd^3}{3} + \frac{(h-2d)(2a)^3}{3} =$$

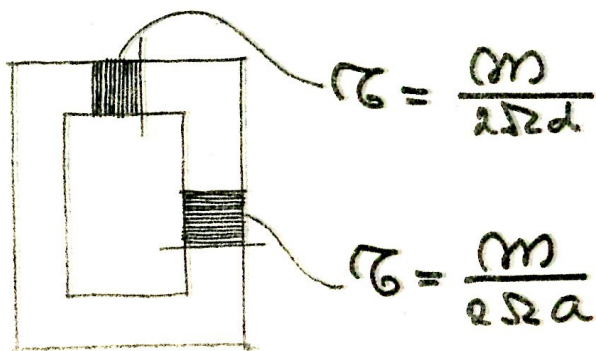
$$= \frac{2}{3}bd^3 + \frac{8}{3}(h-2d)a^3$$

- Rotirea specifică:

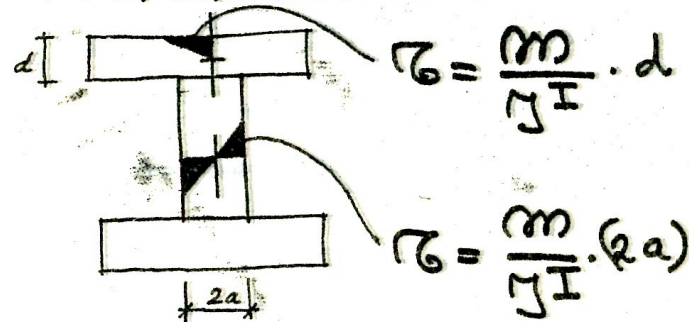
$$\left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{\square} = \frac{M}{G J_{\square}}; \quad \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{I} = \frac{M}{G J_I}$$

- Eforturi maxime.

a) secțiunea tubulară (închisă).



b) secțiunea I (deschisă)



Aplicație. Grindă de torsiune la o copertină.

= Deschiderea copertinei în consolă.....10 m

= Deschiderea grinzii de torsiune între stâlpi..10 m

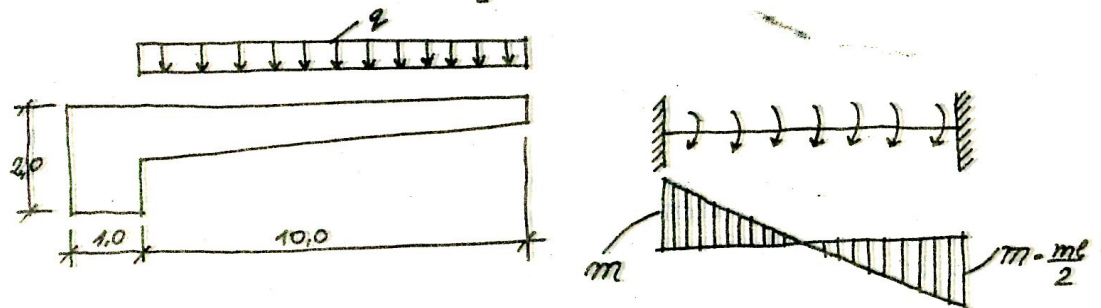
= Încărcarea din dala copertinei: $q = 0,75 \text{ t/mp.}$

= Momentul de răsucire uniform distribuit:

$$m = 0,75 \times 10 \times 5,5 = 41,6 \text{ tm/ml.}$$

= Momentul de răsucire la încastrarea în stâlpi

$$M = \frac{1}{2} \times 10 \times 41,6 \approx 200 \text{ tm.}$$



= Dimensiunile grinzii în cele două variante :

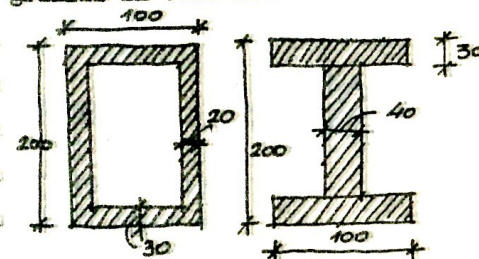
$$b = 100 \text{ cm}$$

$$h = 200 \text{ cm}$$

$$d = 30 \text{ cm}$$

$$= 30 \text{ cm}$$

$$2a = 40 \text{ cm}$$



A. Rigiditatea grinzii de torsiune în variantele.

a) Profil închis tubular

b) Profil deschis I

$$J_0 = \frac{2(100 - 20)^2 \times (200 - 30)^2}{20 + \frac{100 - 20}{30}} = \frac{2 \times 80^2 \times 170^2}{\frac{170}{20} + \frac{80}{30}} = 31,5 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

$$J_I = \frac{2}{3} \cdot 100 \cdot 30^3 + \frac{8}{3} \cdot 140 \cdot 20^3 = \frac{2 \cdot 27}{3} \cdot 10^5 + \frac{8 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 4}{3} \cdot 10^5$$

$$= 1,8 \cdot 10^6 + 2,97 \cdot 10^6 = 4,8 \cdot 10^6$$

$$\frac{J_0}{J_I} = \frac{31,5}{4,8} = 6,5$$

Rigiditatea profilului "închis" este în cazul de față de 6,5 ori mai mare.

B. Eforturile τ_{max} în cele două variante.

a) Profil închis

$$\tau_0 = \frac{m}{2\pi r}$$

$$m = 200 \text{ tm}$$

$$\frac{m}{r} = 80 \times 170$$

$$= 30 \text{ respectiv } 20$$

$$\tau_{\text{min}} = \frac{20000000}{2 \cdot 80 \cdot 170 \cdot 20} = 37 \text{ Kgr/cm}^2$$

$$\tau_{\text{talpă}} = \frac{20000000}{2 \cdot 80 \cdot 170 \cdot 30} = 25 \text{ Kgr/cm}$$

b) Profil deschis

$$\tau_0 = \left(\frac{m}{r}\right) \times h$$

$$\tau_{\text{min}} = \frac{20000000 \cdot 40}{4,8 \cdot 10^6} = 165 \text{ Kgr/cm}^2$$

$$\tau_{\text{talpă}} = \frac{20000000 \cdot 30}{4,8 \cdot 10^6} = 125 \text{ Kgr/cm}^2$$

Astfel de eforturi sînt inacceptabile.

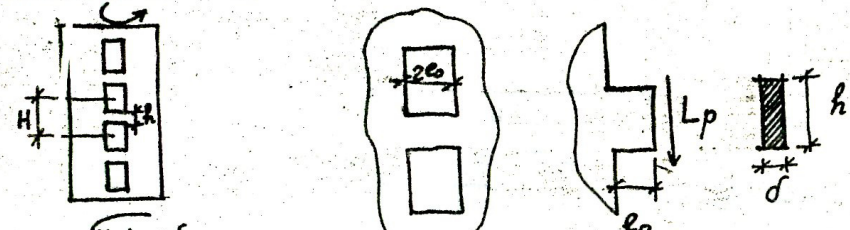
Din toate punctele de vedere un profil închis (eventual cu goluri) va fi preferat în problemele de răsucire.

3. Tuburi cu goluri.

- În majoritatea cazurilor în pereții barelor

tubulare (sau a miezurilor) sînt practicate goluri de uși sau ferestre; se obține astfel o "secțiune compusă" la răsucire.

În astfel de situații plinurile dintre goluri (pane) vor fi proporționate și dimensionate pentru a conserva rigiditatea urmărită și pentru preluarea forțelor de alunecare aferente (Fig.)



$$L_p = 2 \times \delta \times H$$

τ se determină cu elementele date anterior.

Atentie!

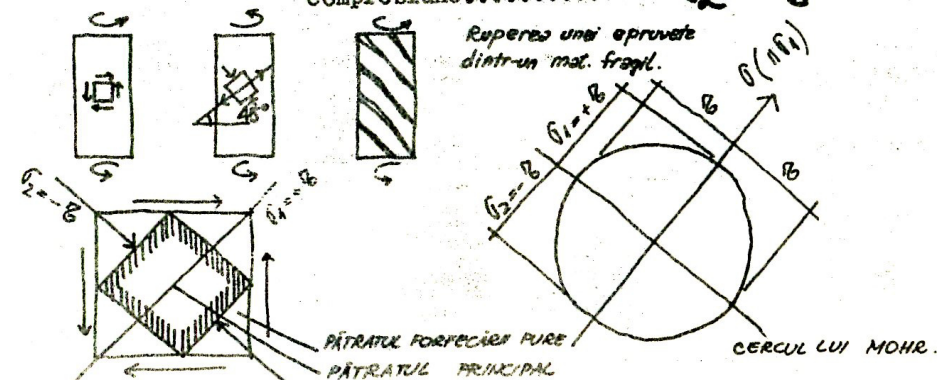
- Cu cît secțiunea "panelor" este mai mică cu atît se diminuează efectul de tub.

- Dacă peste efectul de răsucire se suprapune și încovoiere cu forță tăietoare forțele de alunecare din cele două efecte se suprapun.

4. Răsucire = eforturi principale de întindere și compresie.

- Răsucire pură în seamă de fapt forfecare pură. Cercul lui Mohr construit pentru forfecare pură (Fig.) arată că în acest caz iau naștere simultan patru eforturi unitare caracteristice egale în valoare:

forfecare..... τ_0
 alunecare..... τ_0
 întindere..... $\sigma_1 = +\tau_0$
 compresie..... $\sigma_2 = -\tau_0$



- In cazul unui material "nesimetric" cum este betonul simplu, care are rezistențe diferite de rupere pentru fiecare tip de solicitare:

Compresiune R_b
 Forfecare, lunecare $\sim 0,2 R_b$
 Întindere $\sim 0,1 R_b$,

este de așteptat ca ruperea să se producă aproximativ perpendicular pe direcția efortului principal de întindere.

Experiența confirmă aceasta.

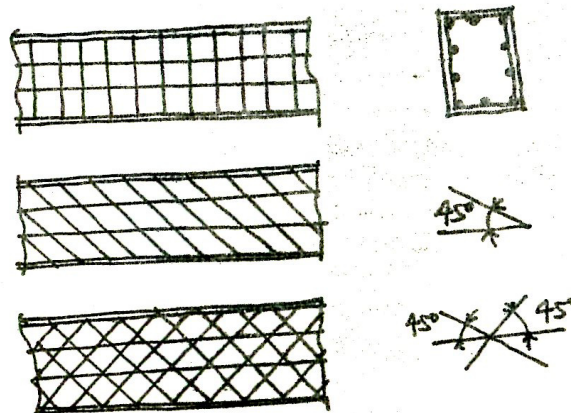
- Eforturile principale de întindere implică o armare corespunzătoare.

↳ Eforturile principale de compresiune pot genera flambaj. Flambajul din torsiune este deosebit de periculos.

5. Principii de armare.

- Forțele interioare de întindere din răsucire combinată cu forfecare se preiau prin armături.

- Armarea la "răsucire - forfecare" se obține cu rețele de bare dispuse după una din următoarele scheme.



(în cazul unor acțiuni alternative de răsucire.

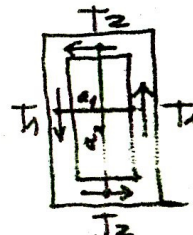
- Rețeaua de armătură se va dispune cât mai aproape de suprafața laterală a elementului unde eforturile tangențiale de răsucire sînt maxime.

- Se va prevedea întotdeauna armarea longitudinală

- Armătura transversală poate fi verticală sau înclinată.

- În cazul unor solicitări importante rețeaua de armătură se va suda la intersecții.

- În privința determinării cantității de armătură, aceasta poate fi făcută pe căi simple; de exemplu prin evaluarea forțelor care forfecă pereții (Fig.).



$$T_1 a_1 + T_2 a_2 = m$$

- Armarea cu rețele bi sau tridirecționale ^{noile} trebuie

înțeleasă astfel: starea de tensiune este o mărime tensorială deci și dispoziția și cantitatea armăturilor pe fiecare direcție trebuie să respecte legile mărimilor tensoriale aplicate unui corp ca betonul armat în care betonul nu are capacitate de rezistență la întindere. Rezolvarea de principiu (și în detaliu) se poate obține prin folosirea cercului lui MOHR și a conceptului de curbă intrinsecă.

Această tratare iese din cadrul cursului nostru.

CAPITOL : B

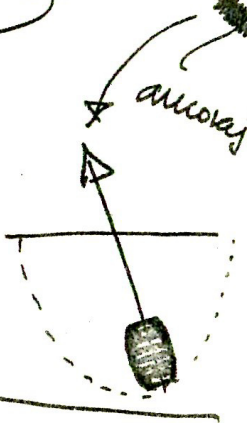
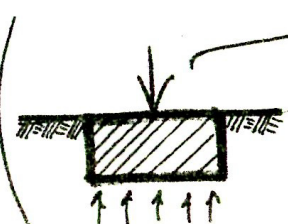
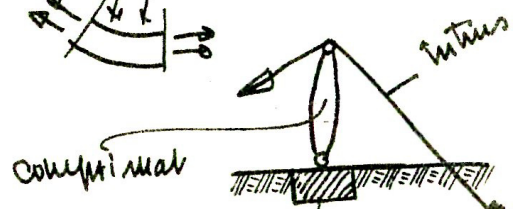
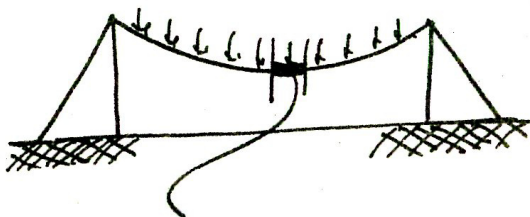
EXTRAPOLARI DE LA GRINDA LUNGA LA GRINDA PERETE SI LA PLACA PLANA.

1. Grinzi lungi
2. Grinzi pereti
3. Consola triunghiulară acționată de o încălzire triunghiulară.
4. Placa pătrată și dreptunghiulară. Tabele.

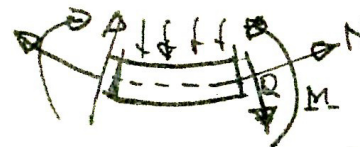
①

1. GRINZI LUNGI (Rezumat)

Finne



grinda flexibilă



N = întindere } Efect de fir

M = moment } Efect de grinda

Q = forță tăietoare

Echilibrul se scrie pe elementul deformat ca la fir.

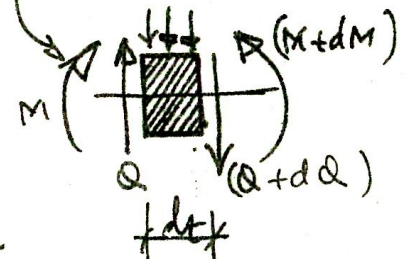
Efectul de fir poate fi neglijat cind $N \approx 0$ - adica atunci cind greutatea este foarte mica.

Grinda rigidă (grinda obișnuită)

$\downarrow 90^\circ$

$$\lambda = \left(\frac{l}{h} \right)$$

$\lambda > 5$ = grinda lungă

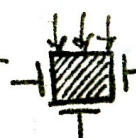
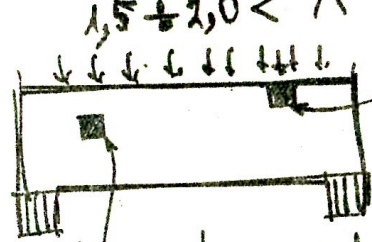


$$\begin{cases} \frac{dQ}{dx} = -q(x) \\ \frac{dM}{dx} = Q(x) \\ \frac{d^2M}{dx^2} = -q(x) \end{cases}$$

- Ipoteza rectinut plan
- $G_y \approx 0$

Grinda de lungime medie

$$1,5 \div 2,0 < \lambda < 5$$



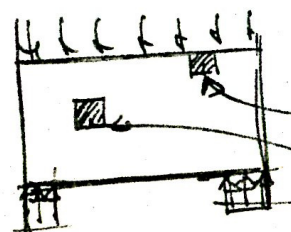
Portita de intrare a forțelor interioare aplicate pe suprafața grinzii



Echilibrul forțelor interioare
Portita de intrare a forțelor de volum

Puncte de legătură între metodele Reprezentării Materialelor și ale Teoriei Elasticității. O parte din ipoteze trebuie reconsiderate ($G_y \neq 0$, Ip. rect. plan).

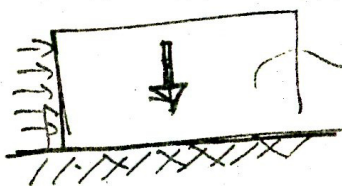
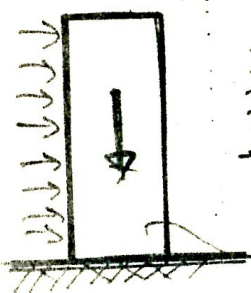
Grinda perete



$$\lambda < 1.5 \div 2.0$$

introducerea forței
exterioare de rupere
de la forțele de volum
NU

- Grate rect. plane ... NU
- $\sigma_y \neq 0$
- schematizarea reazemelor ... NU
- de regulă numai prin TE.
- Altfel e o problemă aparte



drăgăni
scutii (perete)

drăgăni
medie

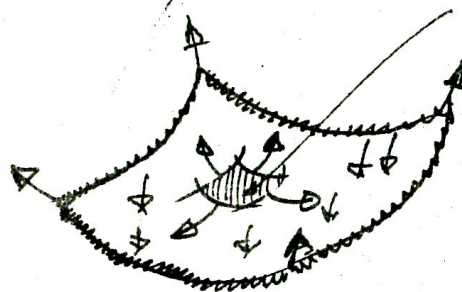
Grupa foarte scutii (foști, benzii)



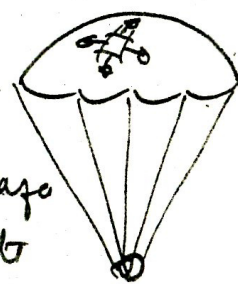
$$\lambda < 1$$

(2)

Membrana



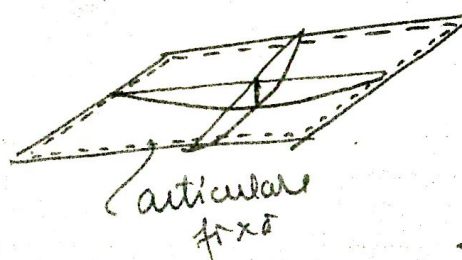
înțindere bidirecțională
(ca la o parasută)



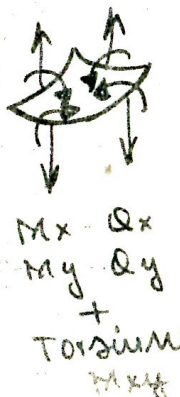
Efect ca și la baza
structurilor gonflabile

Membrana generalizează efectul de
fir.

Placa flexibilă

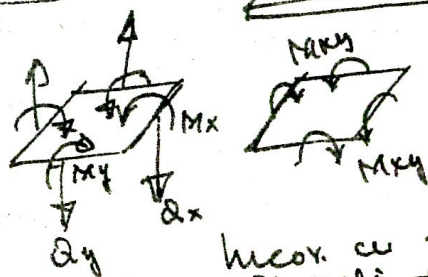
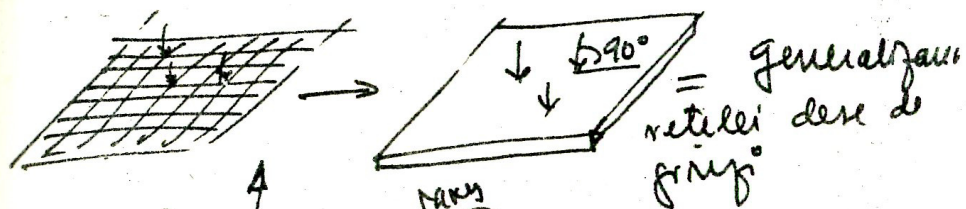


Rigiditate mare
la fete mari
vizibile



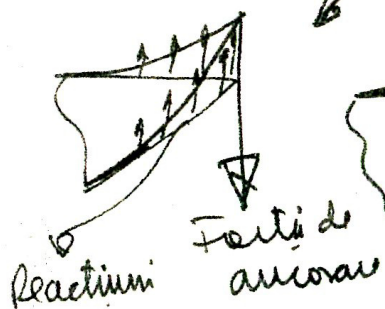
înțindere
bidirecțională
 N_x și N_y .

Placa rigidă (plană)



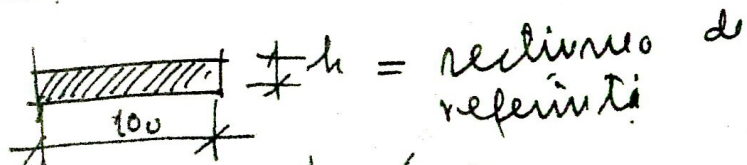
incov. cu forțe tăietoare bidirecționale + TORSIUNE

Geneza torsionării



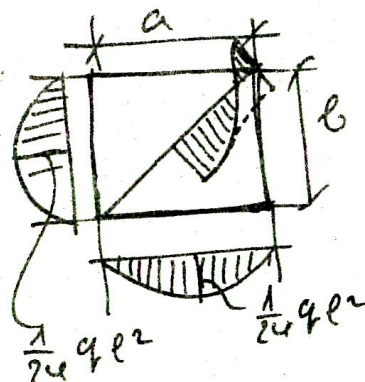
Rectificarea necontinuității în cimp

Torsiune de rectificarea



mm/ml

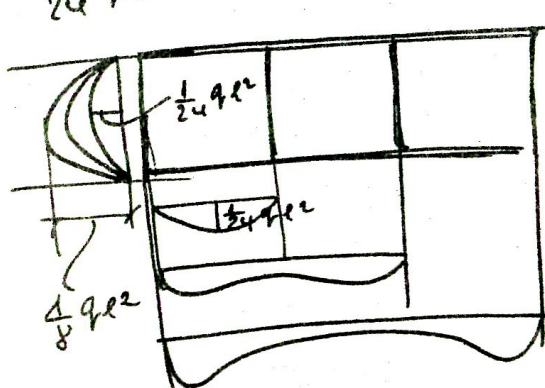
Placă aderată transportă forțe pe două direcții



$\frac{a}{b} = 1$ = placă pătrată

Efectul de placă există ct timp

$$\frac{a}{b} = 1 \div 2$$

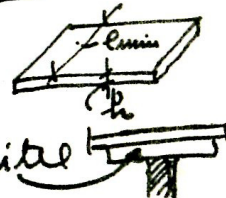


Dacă $\frac{a}{b} > 2$ efectul de placă cu transport bidirecțional dispare.

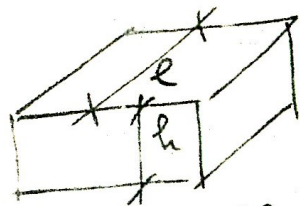
Placa ca efect se întâlnește în multe situații; poate cel mai interesant este cazul "dalelor tridimensionale" (din bare sau TEVi). Jex efectul de placă nu se realizează complet, raportul $\frac{a}{b} = 1 \div 2$ și conservă rațional pentru $\frac{a}{b} > 2 \div 3$

Placă de grosime medie -

$\lambda = 2, 3, 4, 5$ - $\lambda = \frac{l_{min}}{h}$ se analizează cu TE. un exemplu: placă de capete

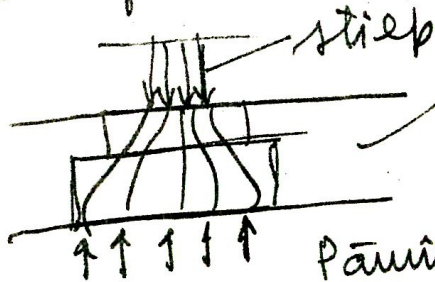


Blocul (placă¹⁰⁷ foarte groasă)

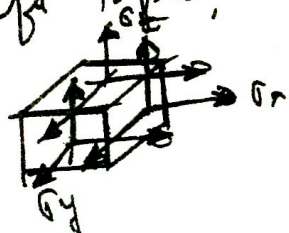


$$\frac{l}{h} < 2$$

Este cazul blocului de fundație
 întru sticlă în
 pământ în
 element de
 difuzare a
 forței dar - prin
 excelența MASTU

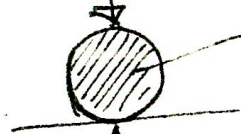


Încălzire spațială

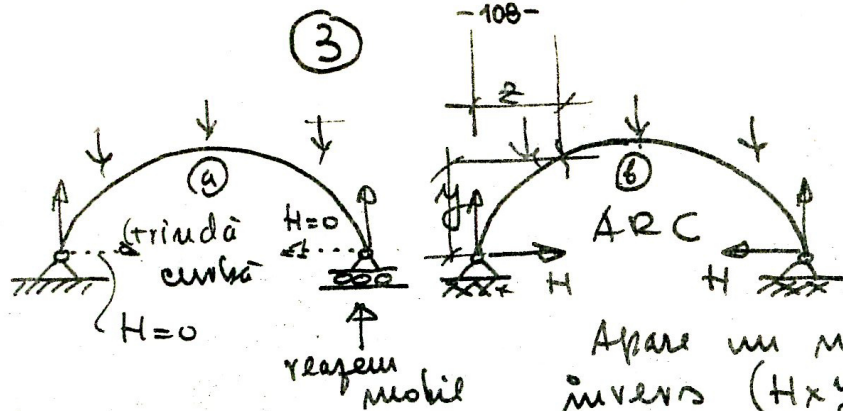


$$T_e = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Un alt exemplu: aparatele de
 reazem:
 Probleme de
 "contact" ale
 TE



Toate dimensiunile sunt comparabile



Întru (a) și (b) este o
 descriere esențială.
 Capul care prezintă interes
 este capul (b)

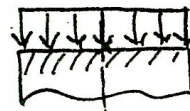
Apare un moment
 invers ($H \times y$)
 $H =$ împingere ori-
 zontală specifică
 arcului

Forma arcului este un parametru de
 proiectare -

$$M(z) = 0$$

$$\alpha(z) = 0$$

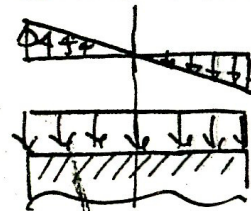
↓
 Arc de
 coincidență



$$M(z) \neq 0$$

$$\alpha(z) \neq 0$$

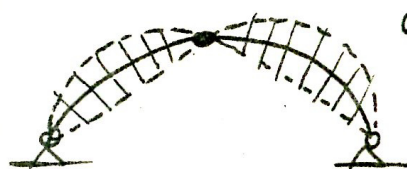
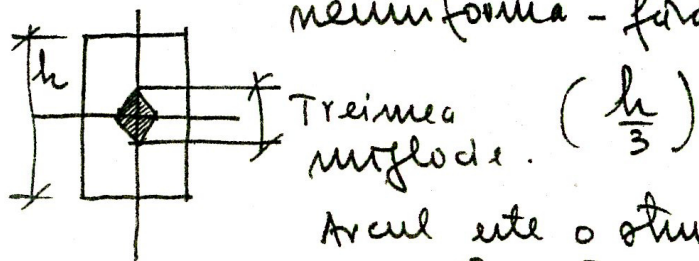
↓
 Nu avem coincidență -
 Momente moderate -



Materialul este folosit
 uniform la compo-
 nente -
 Dacă flambajul este
 prezent această solu-
 ție este cea mai RATIONALĂ

Dacă eforturile de
 încovoiere sunt mai
 atenuate pot apărea efr-
 țiuni de întindere -
 Întindere = etel.

Atentie! dacă momentele sunt moderate rezultanta nu iese din limita rîmbului central - avem compresie neuniformă - fără întindere.

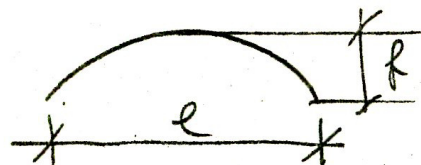


Arcele este o structură a cărei axă geometrică coincide cu linia curbei de presiune (dacă avem un sistem unic de forțe exterioare) sau se înscrie între curbele de presiune extreme (dacă avem mai multe sisteme posibile de forțe exterioare).

Curba de presiune = locul geometric al punctelor de aplicare al rezultantei forțelor exterioare din stînga secțiunii.

Arcele fiind comprimat trebuie protejat la flambaj - această înscărunțire are (A) și înșurubire de material (I)

Arcele constituie o categorie de structuri prin excelență arhitecturale.



$$\lambda = \frac{l}{f} = \text{platitudinea arcului}$$

$$\lambda = \frac{1}{8} \div \frac{1}{10} = \text{arce extinse}$$

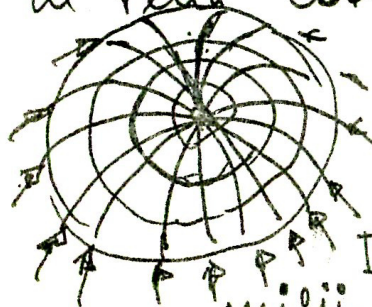
Împingerea orizontală H poate fi determinată astfel:

$$H \approx \frac{q l^2}{8 f} \quad (\text{Vezi curba din anul II})$$

$$H \approx \frac{q l}{8 \lambda} = \text{invers proporțional cu } \lambda$$

Arcele flexibil nu constituie o structură rigidă - este expus flambajului.

Trecerea de la arc la placă curbă poate fi imaginată prin conceptul de rețea curvilinie reticulară



Un ansamblu legat de meridiane și paralele

Înmulțind cele două familii de curbe pînă la cantitatea lor continuă obținem o cupolă -

Criteriul de clădire = curbura
gaussiană:

$$C = \frac{1}{f_1} \times \frac{1}{f_2}$$

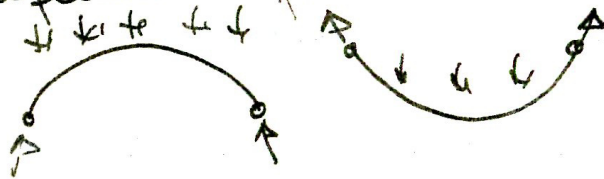
f_1, f_2 = curbura
principale -

$C > 0$... pozitivă

$C = 0$... nulă

$C < 0$... negativă

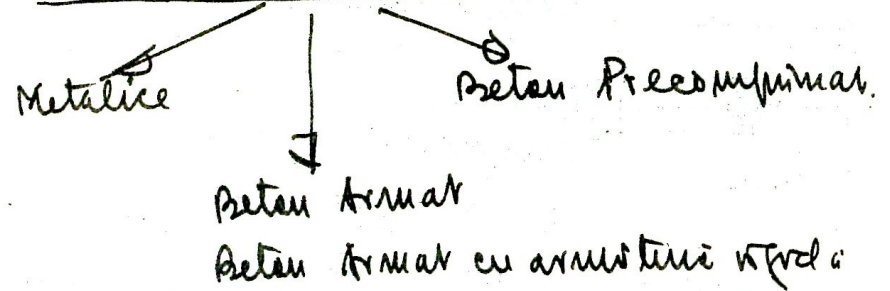
Generalizarea începe în momentul în
care se combină efectul de arc cu
efectul de for:



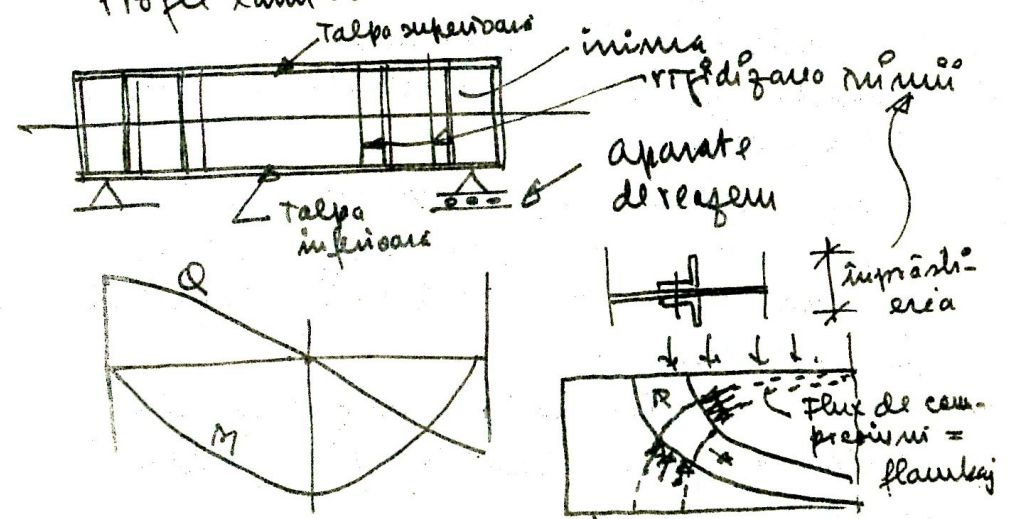
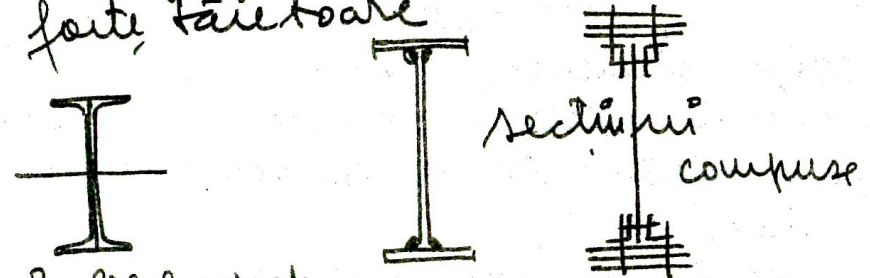
Dezvoltarea acestui capitol a fost
făcută de conf. Iulian Dumitrescu
(vezi subiectele ...)

④

Grinzi cu inimă plină

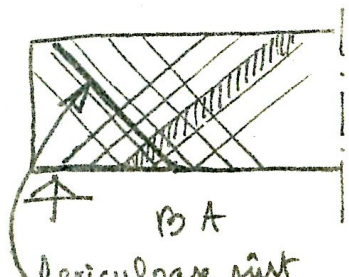


Grinzile lucrați la încovoiere cu
forțe tăietoare



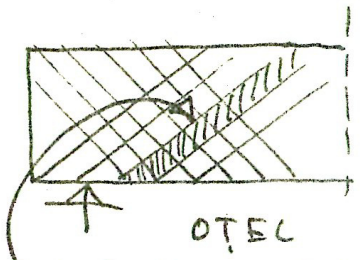
Rigidizarea cu cârmă = crește mult momentul
de inerție

Comparație schematizată



Periculoase sînt
lamile întinse
(au fost introduse
bare de oțel înclinate
sau verticale = armături
transversale)

(Vezi în capitolul despre tracțiuni
și surzirea eforturilor)

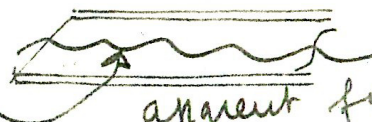


Periculoase sînt lamile
comprimate - voalează
(se introduc rigidizări
verticale sau oblice
pe direcția fluxului
de compresiuni)



Prin laminarea unor profile înalte
($h > 400 \text{ mm}$ - I 40) se introduc
tensiuni inițiale foarte pericu-
loase - conduc la ruperi ca-
sante

Nota: Tensiunile
foarte mari apar în
cassante



aparent fără motiv

Profilele metalice de mare capacitate se
fac compușe



Talpa superioară
înaltă
plină, rigidizată
Talpa inferioară
Elemente de soldațuri

Elementele de soldațuri
se calculează la
forțele de tracțiune
$$L_{12} = \frac{S_{12}}{I} \cdot S_x = \frac{\Delta M_{12} \cdot x}{I}$$

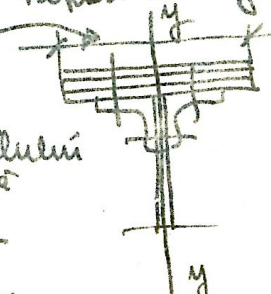
Nitin
Suduri
Bulcări
de mătă
reprezentate

O altă formă de flambaj - talpa com-
primată

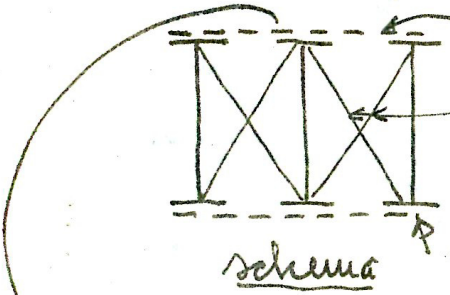


foarte fi combătut
împărșind materialul
în raport cu y-y.

Împărșirea
după y-y conduce
la creșterea momentului
de inerție I_y



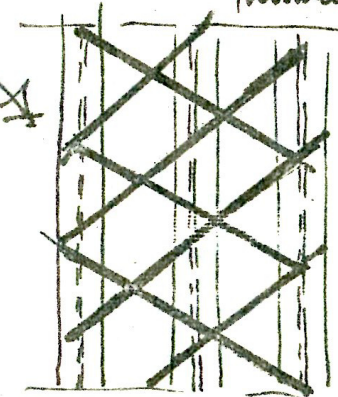
În construcții importante, cu mai multe
grupe metalice se procedează la controrin-
tirea tălpii comprimate -



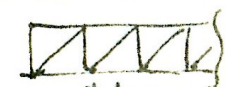
controrintiri orizontale
controrintiri
verticale

schema

nu sînt strict
necesare dacă talpa este
numai întinsă



Cel mai frecvent
sistem de controrintiri
este cel TRIANGULAR



simple triangulare



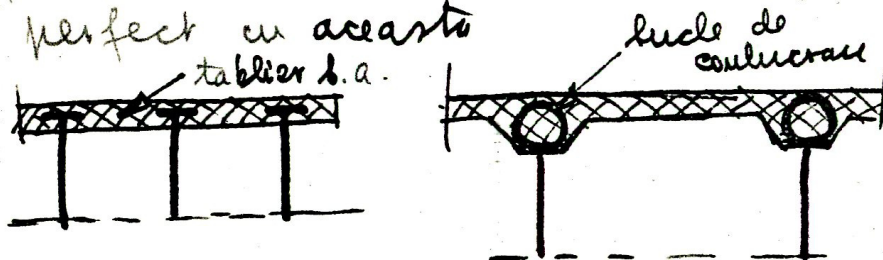
triangulare dubla

La un pod partea superioară pe care se circulă — tabloul — contravinturări orizontale naturale —

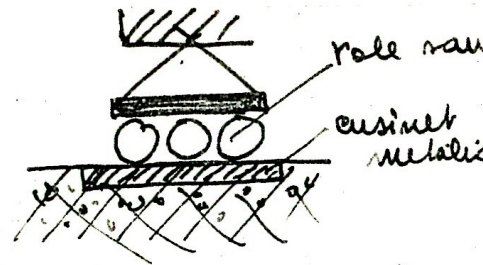
Rolele contravinturilor este multiple:

- rigidizare pentru flambaj
- asigură conducerea pentru melcare, efectele din vânt sau alte acțiuni orizontale (serpui, etc.)
- rigidizare de ansamblu

Tablourile din beton armat constituie o excelentă contravintuire dacă talpa superioară este înglobată în masa betonului sau conlucrați perfect cu aceasta



Dacă conlucrarea este asigurată avem de a face cu o secțiune „hibridă” — mixtă = profile metalice + beton armat. Soluția mixtă conduce la economie de oțel (în zona comprimată) și spre deosebire de betonul de beton și în momentul de vînt și în momentul de rezistență al secțiunii. La grinzile metalice „aparatele de rezemare” — sunt mereu foarte importante



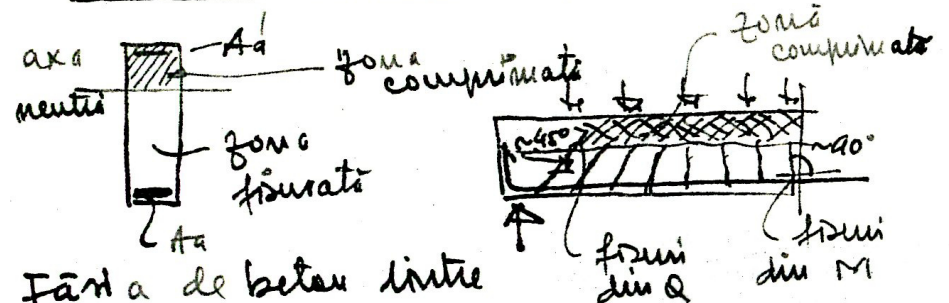
Aparatele de rezemare trebuie să asigure libertatea de deplasare (translații, rotații)

conform schemei luate în calcul: articulat, rezemare simplă.

În zonele seismice aparatele de rezemare trebuie să asigure „ancorarea” structurii — pentru a nu se desprinde de rezemul propriu-zis (culei, pali, pile, etc.).

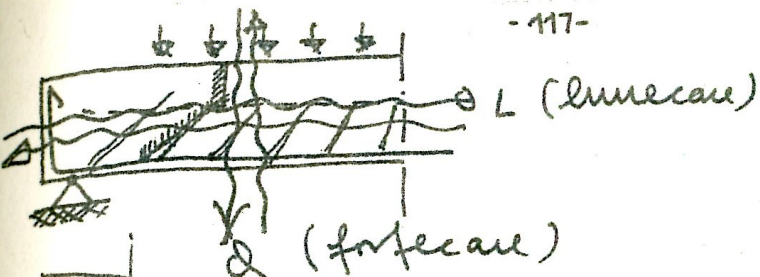
x x x

Grinda cu inimă plină din S.A.



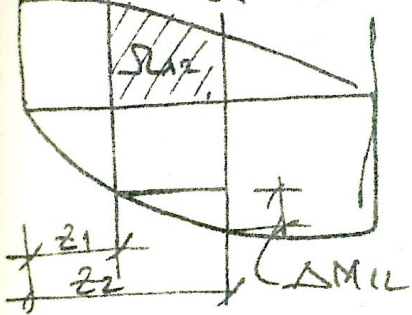
Fâșia de beton întins dintr-un fel vizibil, leagă partea întinsă de cea comprimată — această legătură este asigurată și de armătură transversală (stieri și bare rotzate)

BA ← Beton ← comprimare
← oțel ← întindere (compresie)



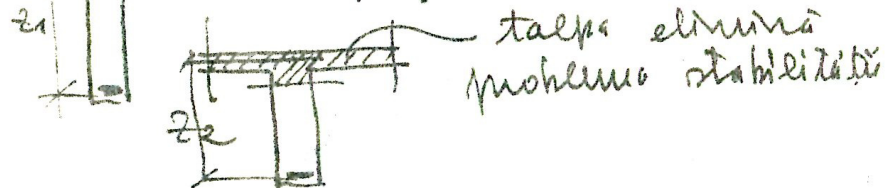
$$L_{12} = \frac{Q_{12}}{Z} = \frac{\Delta M_{12}}{Z}$$

bratul de
pirghie al forței
interioare



La grinzile de b.a. înalte și cu talpa comprimată nelegată rigid (eventual monolit) se pune problema stabilității laterale

se consideră aproximativ ca un stâlp -



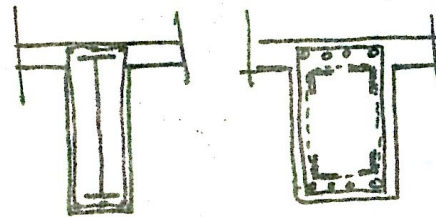
talpa elimină problema stabilității

$z_2 > z_1$ = efect economic = secțiune T este rațională în b.a.

Secțiunea T este neratională la metal.

Secțiunea I nu este rațională în b.a. în schimb este foarte rațională la metal.

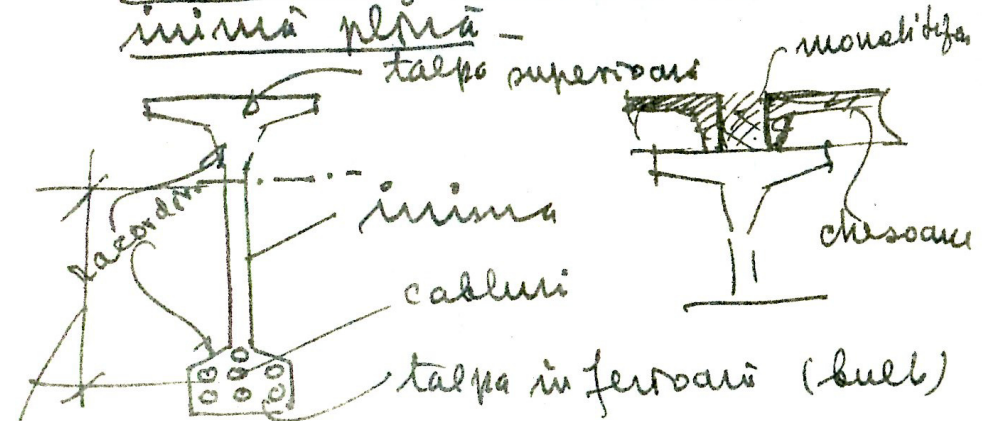
Betonul armat cu armătură rigidă combină avantajele celor două materiale luate separat: betonul armat obișnuit + oțel



- Grinzi mai mari ca la b.a.
- Protecție anticorozivă
- Protecție anti-foc
- Copraji suspendate

BAZ este un material mixt perarhic superior atât în raport cu BA ct și în raport cu oțelul simplu.

Grinda din beton compusă cu inima plină -

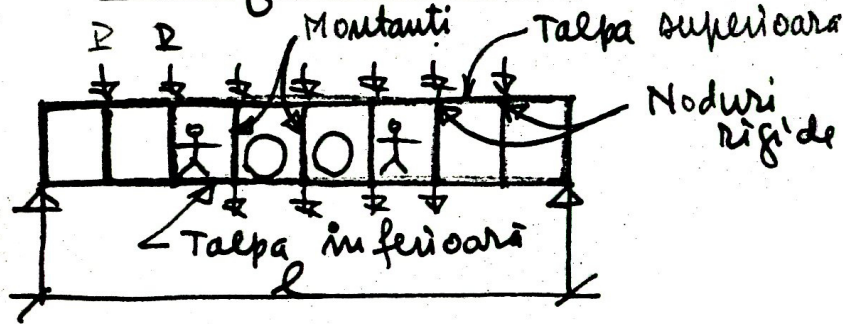


excentricitate cablurilor

Rolul elementelor componente → vezi brevete.

⑤

Grinzi Vierendel



Grinda Vierendel
Acoperă deschisă "l"
40 feră pe etaj
I mai atractiv pentru arhitect
functional

Forțele exterioare P este bine să fie aplicate în noduri (sus și jos)

Trei eforturi globale sau master:

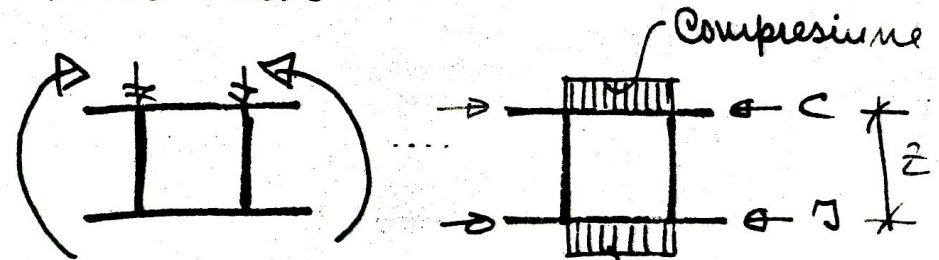
Incovoiere (M) ...

Torfecare (Q) ...

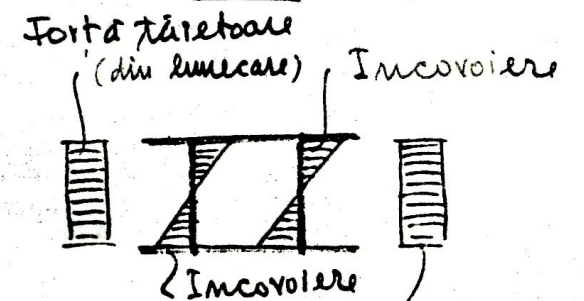
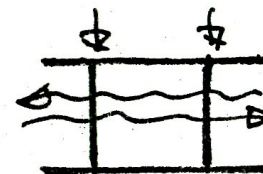
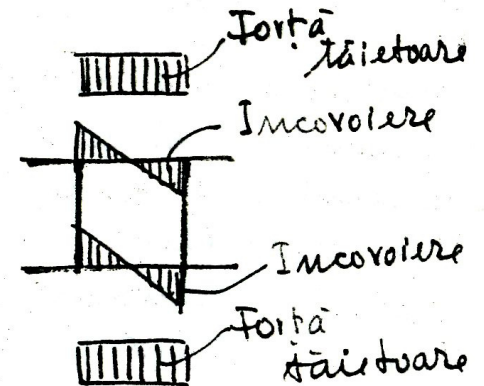
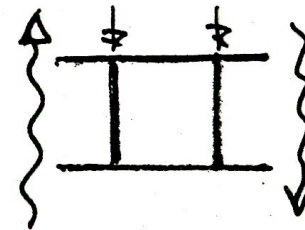
luncare (L) ...

Fiecare "efect global" conduce la două "efecte locale"; din suprapunerile acestor "efecte locale" rezultă soluția

elementelor componente (tăcpi, montanti, noduri) în conformarea de ansamblu în detaliu a acestui compus structural.



$$C \cdot Z = I \cdot Z = M$$



Problema este multiplex static nedeterminată; tratarea dată aici este aproximativă... dar desosebit de interpretativă

Forță tăietoare (din luncare)

Talpa superioară

Compresie cu Încovoire plus Forfecare

↙
Compresie excentrică

Talpa inferioară

Întindere cu Încovoire plus Forfecare

↘
Întindere excentrică

Montanți

Încovoire cu Forfecare.

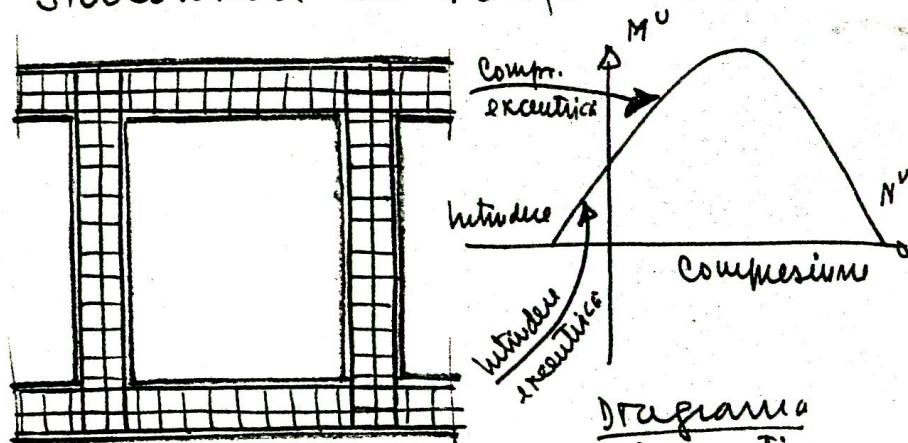


Diagrama
de interacțiune

Încovoire
+
Efort Axial

Probleme de conformare

a. Talpa superioară

Compresie excentrică {
Arie de beton
Marcă de beton
Armătură lung. (moderată)
Armătură transvers. de fretare
(eventual și în anumite zone)

Forfecare {
Arie de beton
Armătură transvers. (cștieri sau eventual bare ridicate)

NOTA. Prin comprimarea naturală a betonului este reprezentat aceluși la forfecare:

b. Montanți

Încovoire {
Arie de beton cu braț de pârghie
Armătură longitudinală

Forfecare {
Arie de beton cu braț de pârghie
Armătură transversală (cștieri)

c. Talpa inferoară

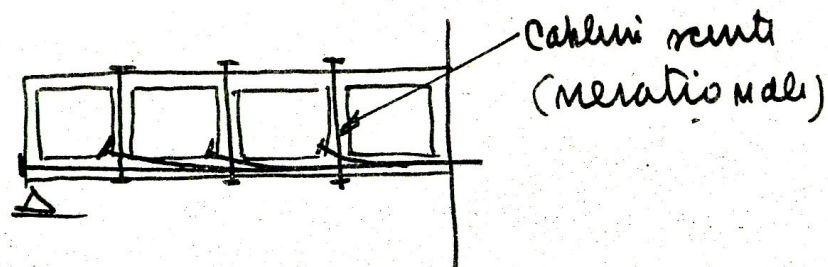
Intinderea
excentrică { Armătură longitudinală
de tirant (putem să în
zona centrală)
Măsuri pentru a micșora
derohiderea fibrilor
(etrieri dens și mularia
cabelor în masă de beton)

Forfecarea { Arme de beton
Armături transversale

NOTA. Prin întinderea betonului
scade rezistența acestuia la
forfecare.

Sensibilități n° Probleme

- Talpa inferoară este solicitată la
întindere cu încovoiere → se meteahă
la mecompunimare
- Montanții lucrează la încovoiere
se meteahă la mecompunimare
- datorită intersecției în unghi drept a
pentilității este de a folosi cabluri drepte;
dar cablurile verticale ieșite pe ocaz
merationale,



- Sistemele în G V au rigiditate mare
în planul lor → săgeți mari
(sau moderate)
- Curgerea lentă din talpa compri-
mată accentuează deplasările
(săgețile)
- Toate elementele lucrează la
încovoiere → întindere → for

concluzie. Acest sistem va fi adoptat
numai în cazuri izolate când din
motive funcționale intră în
competiție cu celelalte sisteme
(grinda cu rimă plină, grinda
cu fibrile).

Sisteme Vierundel pot fi realizate
din toate materialele de care
dispunem: beton armat, beton
armat cu armături rigide, beton
mecompunat (cu rețesă), oțel -

⑥

-125-

Grinzi triangulate Grinzi cu țebre

Un sistem triangulat = un sistem format din bare solidarizate între ele la extremități (în noduri) astfel încât:

a) axele geometrice să fie strict concurente în noduri

b) figura geometrică definită de axele geometrice ale barelor să constituie un ansamblu închis de triunghiuri cu vîrfurile în noduri

Sistemele triangulate pot fi plane (transportul forțelor pe o direcție) sau spațiale (transportul forțelor pe două sau mai multe direcții).

Ne vom ocupa numai de sistemele plane de tipul grinzilor cu țebre cu tălpi paralele. Forțele exterioare sînt aplicate în noduri.

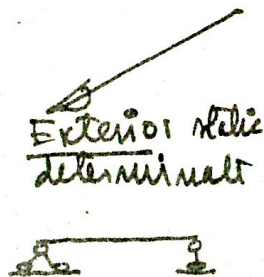
Reazemele se realizează în noduri.

-126-

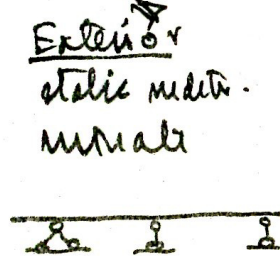
Se admite că barele sînt articulate în noduri (în realitate solidarizările sînt rigide în marea majoritate a cazurilor). În aceste condiții eforturile care se dezvoltă în bare sînt numai de întindere sau compresie (în realitate solidarizările rigide generează momente încovoietoare locale).

Doi probleme de calcul

Calculul reacțiunilor din reazeme



Calculul eforturilor din bare



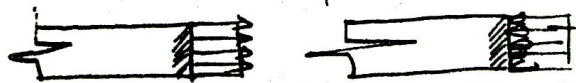
Numărul de bare b este strict necesar pentru a asigura indeformabilitatea geometrică
 $b = 2n - 3$

Interior static determinat

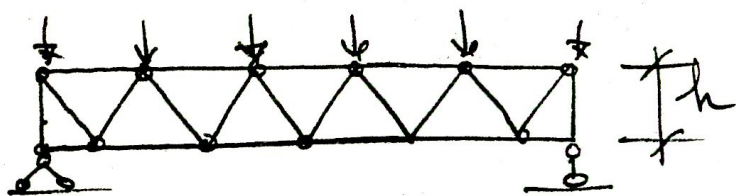
Interior static nedeterminat

" b " este mai mare decât cel strict necesar pentru a asigura indef. geometrică
 $b > 2n - 3$

Barele fiind întinse sau comprimate centric materialul este folosit integral & omogen (uniform) → cea mai rațională formă de exploatare a materiei.



Eforturile globale < $\begin{cases} \text{încovoiere} \\ \text{Forță tăietoare} \end{cases}$

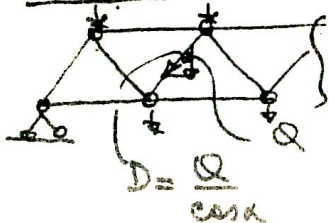


încovoierea $\begin{cases} \text{Compresie în} \\ \text{talpa superioară} \\ \text{întindere în talpa} \\ \text{inferioară} \end{cases}$

Eforturile se determină cu procedee cunoscute din anul II (grinzi cu fibrele - Cremona - Ritter - Culman). Ele sunt de formă:

$$C = \frac{M_i}{h} \quad T = \frac{M_k}{h}$$

Forță tăietoare $\begin{cases} \text{întindere în diagonalele} \\ \text{inclinate spre} \\ \text{reazeme} \\ \text{Compresie în diagonalele} \\ \text{inclinate spre} \\ \text{cîmp} \end{cases}$



Atenție! 1. Eforturile maxime în țelpi au loc în zonele în care momentul încovoietor atinge valori maxime (la grinda cu două reazeme și fără cîrci → în cîmp).

2. Eforturile maxime în diagonale (și montanți) au loc în zona reazemelor.

Barele întinse nu pot prezenta probleme de stabilitate; barele comprimate prezintă flambaj în formă latentă.

În principiu apariția flambajului poate anula avantajele amintite mai sus (rețutarea uniformă) → va trebui mărită greutatea barelor

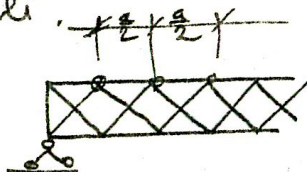
$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{l}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{I}{A}}}$$

Acțiuni asupra greutății λ

$\begin{cases} \text{întinderea barelor} \\ \text{împresarea materialului în rap. cu} \\ \text{axele principale} \end{cases}$

O soluție este politriangularea:

bi, tri, ... poli.



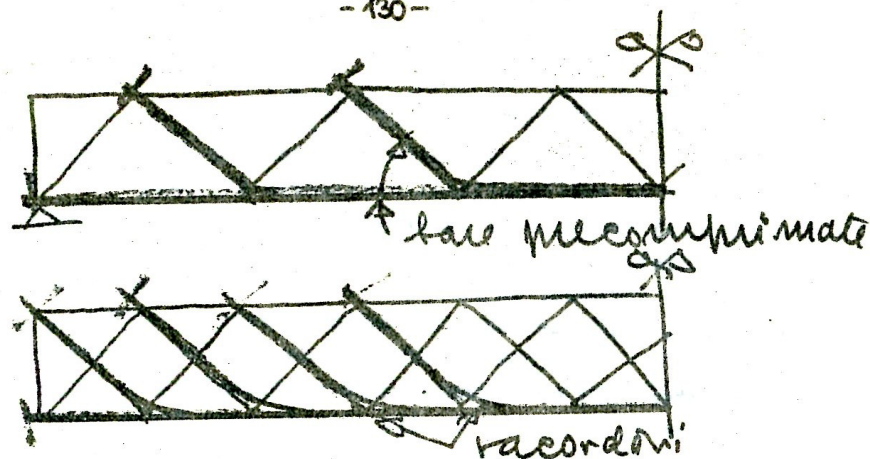
Un sistem politriangulat poate fi considerat ca o sumă de sisteme simple tri-angulate

Eforturile din diagonale scad fiindcă forța tăietoare se împarte la mai multe bare:

$$\frac{Q}{2 \cos \alpha} \quad (\text{la bi-triangular})$$

$$\frac{Q}{n \cos \alpha} \quad (\text{la politriangular})$$

Sistemele triangulate se pot raporta la o precompresiune la fel de simplă ca la grinzile cu inimă plină. Vor fi preferate sistemele cu diagonale întinse pentru a putea ridica cablurile din cîmp aceluși unde ele devin inutile (scad eforturile de întindere,



Un exemplu: Sala de sporturi din Ploiesti (Galati) → sistem bi-triangular, precomprimat.

2. GRINZI PERETI

2.1. Clasificarea grinzilor

- În componerea structurilor de rezistență, grinda dreaptă, avînd ca rol funcțional realizarea deschiderilor libere iar ca rol structural transportul la reazeme al forțelor exterioare normale pe axul geometric, constituie un element de structură fundamental. Față de diversitatea formelor în care poate interveni "efectul de grindă" în practică, o sistematizare a studiului este necesară.

- Efortul secțional care caracterizează valoric forțele exterioare ce traversează o secțiune "z" a grinzii este forța tăietoare $T(z)$. Secțiunile din cîmp în care forța tăietoare este nulă definesc într-un anumit sens originea transportului de forțe (OT); secțiunile cu $T = 0$ situate în zona reazemelor arată terminarea transportului de forțe și transmiterea reacțiunilor altor elemente de structură (TT). Secțiunile în care forțele tăietoare sînt maxime se situează la limita reazemelor (TM).

La o grindă obișnuită, forța tăietoare în secțiunea "z" (Fig. 1) va fi deci egală numeric cu suma forțelor exterioare aplicate pe grindă între secțiunile OT și "z", în drum spre reazem. În cazul în care în afara forțelor normale pe axul grinzii intervin și cupluri cuprinse în planul principal "Oy" semnificația secțiunilor OT și TT se menține în principiu deși în fiecare caz este necesară o interpretare adecuată.

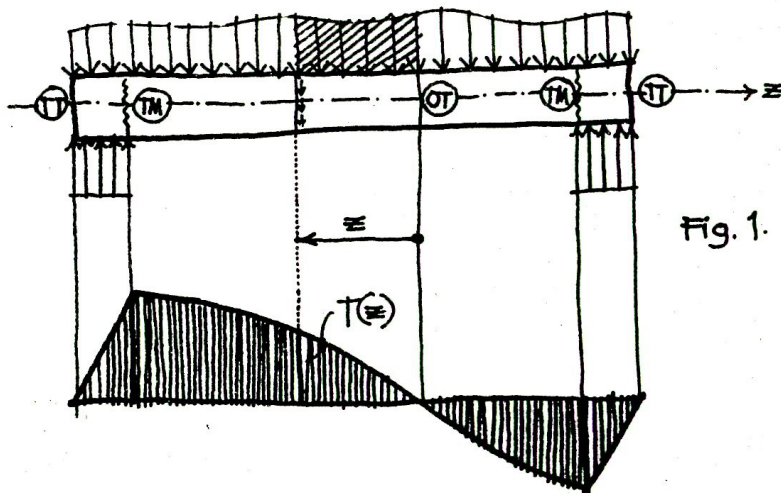


Fig. 1.

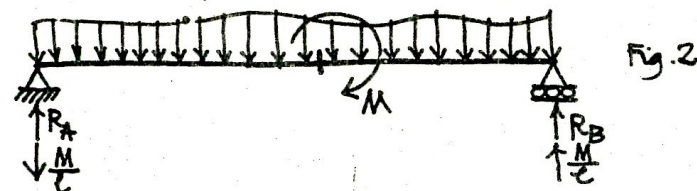


Fig. 2

Secțiunea OT determinată pentru $M = 0$ se deplasează spre stînga

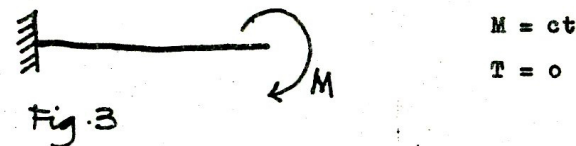


Fig. 3

$$M = ct$$

$$T = 0$$

Încovoiere pură = transport de cupluri

- Într-o interpretare geometrică, deschiderea ℓ introduce în problemă distanța de transport, aria $A = \lambda h$ cantitatea de material utilizat pentru realizarea secțiunii iar momentul de inerție $I = \beta h^3$, împrăștierea ariei A pe înălțimea h a secțiunii. În consecință raportul $\lambda = (\frac{\ell}{h})$ care caracterizează din punctul de vedere al arhitectului "proporțiile grinzii", este de așteptat să joace un rol important în comportarea diferitelor categorii de grinzi. Teoria generală a grinzilor confirmă această previziune.

- Cazurile limită între care se situează diferitele categorii de grinzi pot fi adoptate astfel; la o extremitate ca fenomen de limită, FIRUL iar la celălaltă PASIA.

FIRUL, CABLUL. Aria secțiunii transversale este concentrată în jurul centrului de greutate iar momentul de inerție este foarte mic; în aceste condiții firul sau cablul flexibil nu poate transporta forțe prin compresiune sau prin încovoiere. Transportul forțelor exterioare la reazeme este posibil numai prin eforturi de întindere și în condițiile existenței unei săgeți cînd forța nu este în prelungirea axului.

- Un fir acționat de un ansamblu de forțe se deformează și se dispune după o formă de echilibru care coincide cu curba funiculară a forțelor; este deci o structură de coincidență.

Dacă forțele exterioare pot fi considerate uniform distribuite pe orizontală atunci întinderea din fir se determină aproximativ cu relația :

$$N = H = \frac{ql^2}{8f}$$

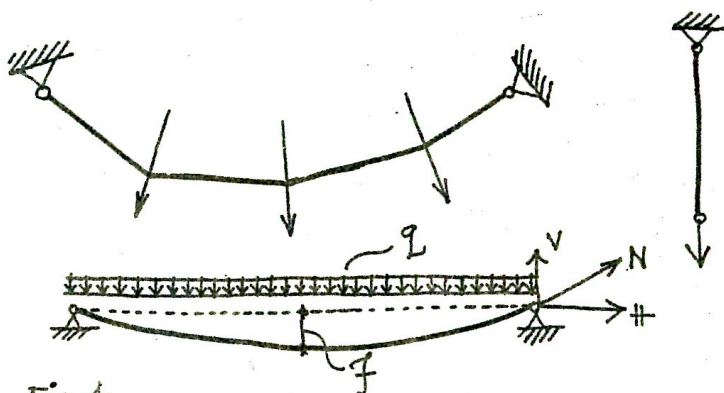
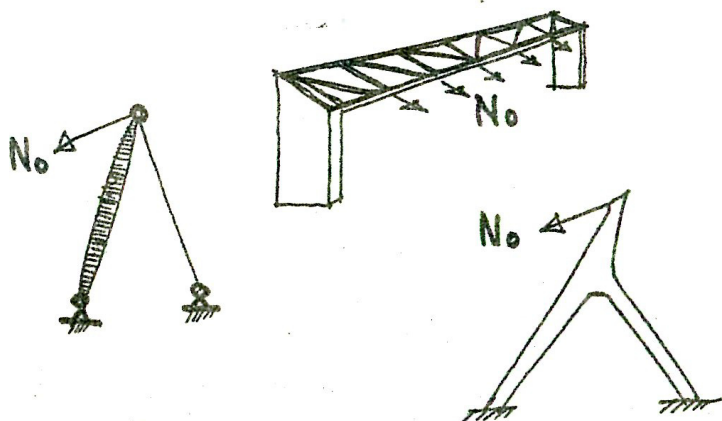


Fig. 4

$$N \approx H = \frac{ql^2}{8f}$$

- "Descărcarea" la reazeme a reacțiunii N_0 cu înclinarea θ_0 necesită o structură specială care poate fi constituită dintr-un ansamblu "stîlp - tirant", o grindă în planul forțelor N_0 cu o descărcare adecuată la reazeme (lamelle sau diafragme verticale), un cadru triunghiular sau un sistem combinat.



GRINDA FLEXIBILĂ. Este o structură intermediară a cărei comportare se înscrie între fir și grinda lungă (rigidă).

Pentru a trece de la fir la grinda flexibilă trebuie să se modereze deschiderea h , să se mărească aria secțiunii transversale A și să se împrăstie materialul în raport cu planul forțelor (I) astfel încît momentul de inerție I_x să devină semnificativ. În aceste condiții grinda flexibilă transportă forțele aplicate la reazeme prin încovoiere cu forță tăietoare (M, T) și efort axial de întindere (N), adică printr-o combinație a efectului de grindă și de fir.

- Pentru a încărca reazemele cu eforturi axiale tangente la axa deformată, acestea din urmă trebuie fixate blocînd tendința de deplasare pe orizontală (articulații fixe).

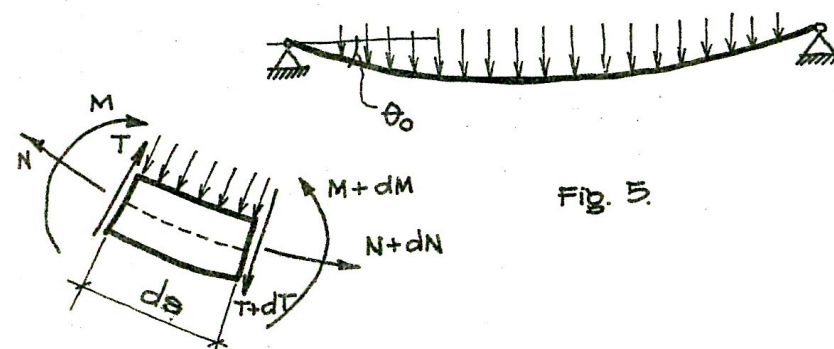


Fig. 5

- Intrucît deplasările $V(z)$ sînt comparabile cu dimensiunile secțiunii transversale, la scrierea echilibrului unui element de grindă "ds" se ia elementul deformat; aceasta complică studiul în comparație cu grinda obișnuită (rigidă) la care ecuațiile diferențiale dintre M, T și $q(z)$ s-au obținut pe elementul dz nedeforimat.

În principiu o grindă devine flexibilă atunci cînd criteriul de rigiditate statică nu mai este satisfăcut. Pentru o grindă de oțel, simplu rezemată, cu $\sigma_a = 1.400$ aceasta înseamnă:

$$\sigma_r = \left(\frac{1}{\epsilon} \right) = \frac{\lambda}{7200} > \frac{1}{k} \quad 1) \quad -135-$$

Considerând $K = 360$, rezultă:

$$\frac{\lambda}{7200} > \frac{1}{360}$$

$$\lambda > 20$$

GRINDA LUNGA (RIGIDA). Grinda devine rigidă în momentul în care rigiditatea secțiunii transversale asigură transportul forțelor numai prin încovoieră cu forță tăietoare (M, T) iar deplasările sînt atît de mici încît la scrierea echilibrului pot fi neglijate. În aceste condiții între intensitatea (densitatea) forțelor exterioare $q(z)$, forța tăietoare $T(z)$ și momentul încovoietor $M(z)$ există cunoscutele legături diferențiale:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = \frac{dT}{dz} = -q(z)$$

$$\frac{dM}{dz} = T(z); \quad \frac{dT}{dz} = -q(z)$$

Această exprimare analitică conține în esență geneza eforturilor secționale. Raționamentul este următorul:

= forța verticală $q(z)dz$ aferentă elementului dz nu poate fi echilibrată decît tot de o forță verticală din categoria T

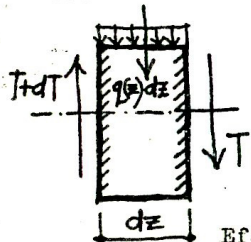


Fig. 6

Eforturi axiale din categoria N nu pot lua naștere deoarece nu participă la echilibrul forțelor (verticale).

1) Vezi prelegerea "Criteriul rigidității statice"

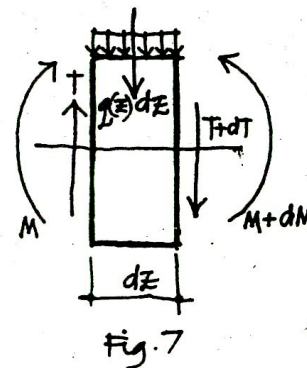


Fig. 7

= pe lungimea dz forțele interioare de tip T trebuie să asigure o diferență dT astfel încît:

$$q(z)dz = dT$$

= elementul nu este încă în echilibru deoarece momentul forțelor în raport cu un punct oarecare nu este nul; pe cele două fețe ale elementului trebuie să se dezvolte două cupluri cu o diferență dM care stabilește echilibrul definitiv:

$$Td_z + dT \cdot \frac{dz}{2} = dM; \quad \frac{dM}{dz} = T$$

- Grinda lungă care satisface condiția $\lambda = \left(\frac{E}{h} \right) > 5$ a

permis admiterea unor ipoteze și simplificări:

- = ipoteza lui Bernoulli
- = neglijarea efortului τ în raport cu eforturile τ_z și τ_y
- = principiul Saint Venant
- = reducerea studiului deformărilor la un ax
- = neglijarea deformațiilor unghiulare la determinarea deplasărilor

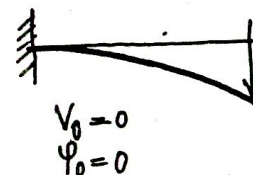
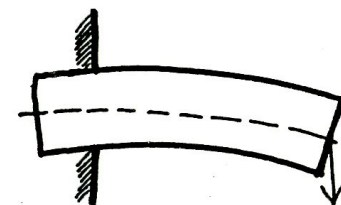


Fig. 8



- În baza acestor ipoteze și simplificări eforturile τ_z și τ_y s-au putut determina, în domeniul elastic de lucru, cu formule extrem de simple.

$$\tau_z = \frac{M(z)}{I_x} \cdot y$$

$$\tau_y = \frac{T(z)}{b \cdot I_x}$$

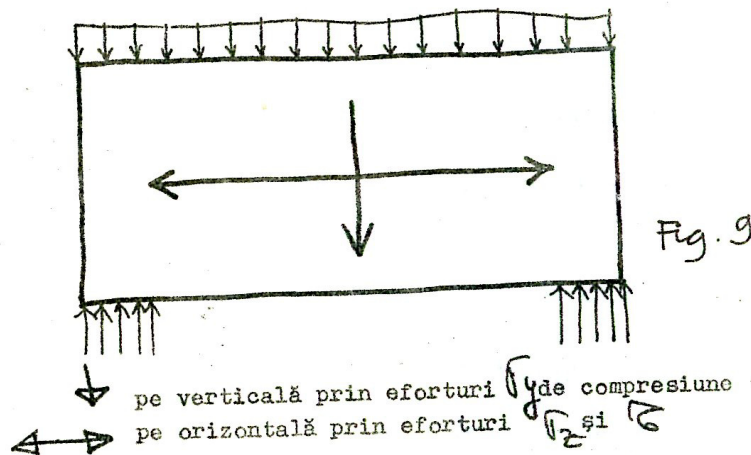
(Navier)

(Juravski)

GRINDA MEDIE. Dacă înălțimea secțiunii transversale devine de același ordin de mărime cu deschiderea se produce o redistribuire calitativă a eforturilor; efortul de apăsare a fibrelor ca urmare a transportului pe verticală nu mai poate fi neglijat în raport cu celelalte eforturi, ipoteza secțiunilor plane devine treptat discuta-

bilă. La determinarea deplasărilor influența deformațiilor unghiulare (λ) devine sensibilă iar legarea la reazeme trebuie introdusă mai detaliat decât la grinzile scurte.

DIRECȚII DE TRANSPORT



- Aceste grinzi de tranziție intercalate între grinzi lungi și cele scurte (grinzi perete) au fost denumite de noi GRINZI MEDII¹⁾; ele asigură o continuitate logică din punct de vedere tehnic în ceea ce privește modul de lucru, simplificările și metodele de investigare a stării de tensiune și deformare. În studiul grinzilor medii metodele elementare ale Rezistenței Materialelor trebuie completate cu câteva elemente din Teoria Elasticității

Concluziile investigațiilor teoretice.

1. Grinzile medii se înscriu între limitele:

$$2 \div 3 < \lambda < 5$$

2. Eforturile σ_z și τ pot fi determinate cu suficientă

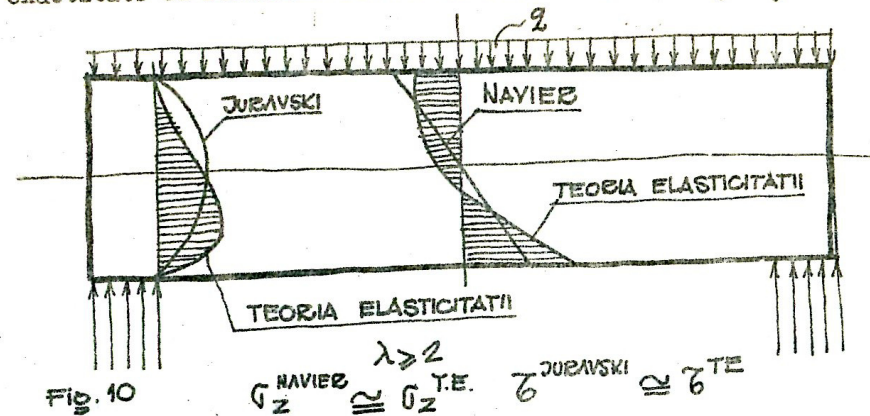
1) Despre o clasificare tehnică a grinzilor drepte și a bolților cilindrice.

Al Cișmigiu
Ind. Construcțiilor nr. 6/1955

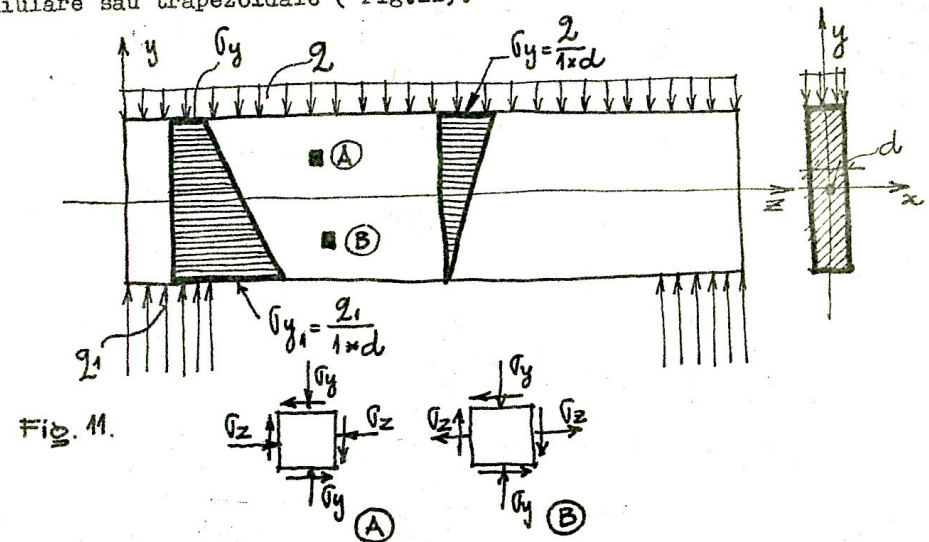
1) Rigiditatea consolelor de lungime medie acționate de forțe masice orizontale. Bul. Stiințific al ICB nr. 1/1954

Al. Cișmigiu

exactitate cu formulele Navier și Juravski pentru $\lambda > 2 \div 3$



3. Efortul σ_y nu poate fi neglijat; valorile acestui efort pot fi determinate însă aproximativ admitând diagrame triunghiulare sau trapezoidale (Fig. 11).



4. Expresia generală a deplasării maxime (săgeata) poate fi pusă sub forma:

$$f_{gr.medie} = f_{gr.lungă} \times (1 + C)$$

$$C = \text{corecțiune} = \frac{K}{\lambda^2}$$

Pentru grinzile medii ancorate la ambele capete din beton armat :

$$\alpha \approx \frac{2}{\lambda^2}$$

se vede că pentru $\lambda > 5$, corecțiunea poate fi neglijată iar pentru $\lambda = 2$, $\alpha = 0,5$

5. Starea de tensiune și respectiv traectoriile eforturilor principale depinde esențial de modul de rezemare (criteriul rezemării) și de modul de încărcare (criteriul încărcării). În principiu cu cât rezemările sînt mai rigide (încăstrare, continuitate la reazeme, bordaje) și încărcările mai localizate (concentrate) sau mai variate cu atît domeniul grinzilor medii este mai restrîns. Principalele scheme de rezemare sînt indicate mai jos.

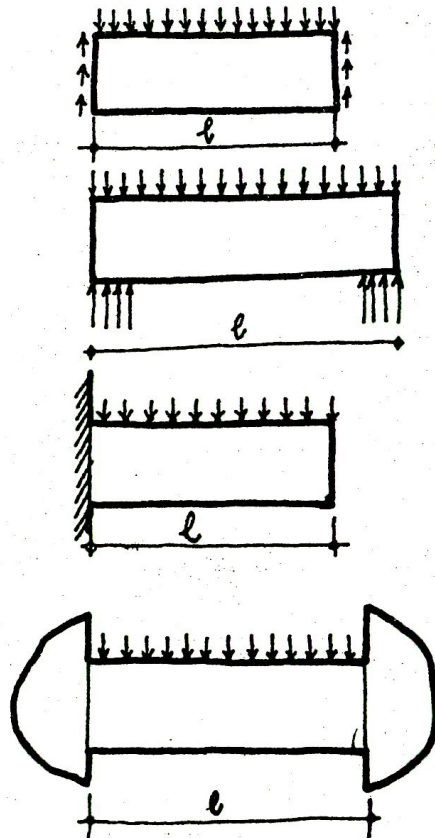


Fig. 12

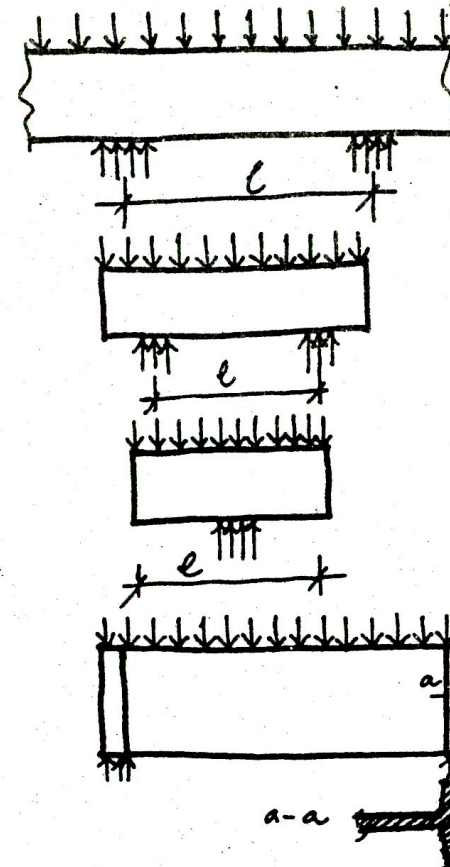
Rezemare simplă pe timpene
 $5 > \lambda > 2$

Rezemare simplă la partea inferioară
 $5 > \lambda > 2,5$

Consolă
 $5 > \lambda > 3$

Încăstrare la ambele capete
 $5 > \lambda > 2 \div 3$
 $\lambda > 1,5 \div 2$ pentru paneele diafragmelor compuse.

Rezemare pe mai multe reazeme (grînda continuuă)
 $5 > \lambda > 2,5$



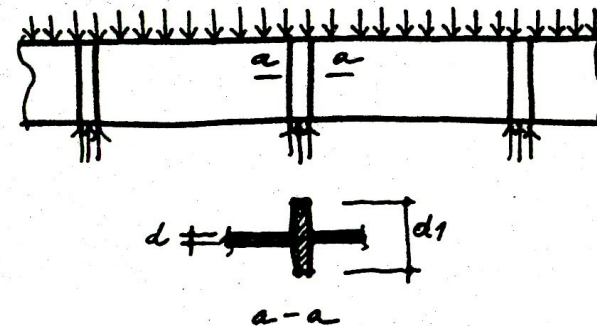
Rezemare simplă cu console
 $5 > \lambda > 2,5$

Rezemarea pe un reazem
 $5 > \lambda > 2,5$

Rezemare pe bordaje evazate
 $5 > \lambda > 3$

Grîndă continuuă pe reazeme evazate.

$$5 > \lambda > 3,5$$



GRINZI SCURTE. Dacă înălțimea grinzii crește în raport cu deschiderea astfel încât $\lambda < 2 \div 3$, se obține un nou element de structură, grinda scurtă, șaiba sau grinda perete.

- Starea de tensiune și deformare a grinzilor scurte este complexă și se determină în domeniul elastic de lucru cu metodele generale ale Teoriei Elasticității aplicate problemei plane.
- Ecuația diferențială de bază este de forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0$$

$$\Delta \Delta w = 0$$

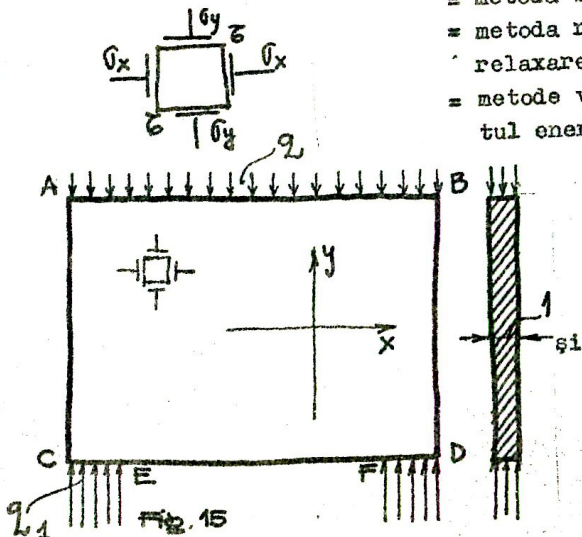
unde $w(x,y)$ este o funcție necunoscută care se determină pentru fiecare problemă în parte.

Eforturile unitare se obțin prin derivarea acestei funcții

$$\tau_x = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \tau_y = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Dificultățile matematice provin din determinarea funcției $w(x,y)$ astfel încât să fie satisfăcute în detaliu condițiile de contur; încărcarea cu forțe exterioare și rezumarea. Cele mai frecvente metode aproximative de rezolvare sînt :

- = metoda seriilor
- = metoda rețelilor (diferențe finite, relaxare, elementul finit).
- = metode variaționale bazate pe conceptul energiei de deformare.

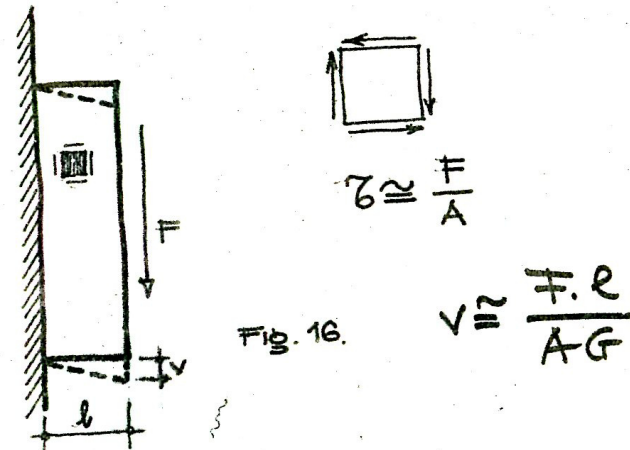


$$\begin{aligned} \text{AB} & \begin{cases} \tau_y = -q \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \\ \text{AC} & \begin{cases} \tau_x = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \\ \text{BD} & \begin{cases} \tau_x = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \\ \text{CE și FD} & \begin{cases} \tau_y = -q_1 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \\ \text{EF} & \begin{cases} \tau_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

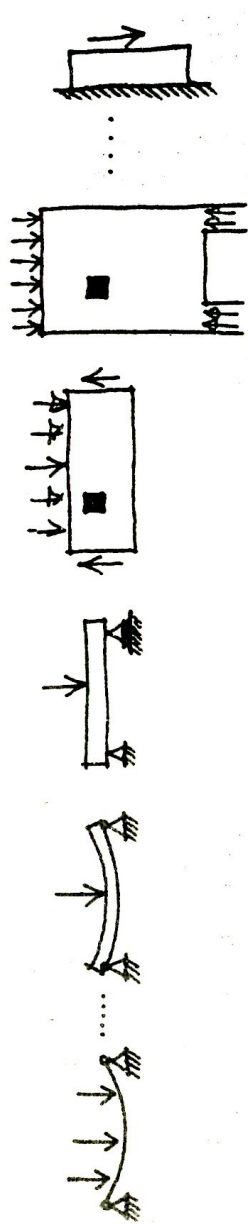
Teoria matematică a grinzilor scurte depășește scopurile disciplinei noastre. Cu toate acestea la pct.2 vor fi date principalele elemente care interpretate în mod adecuat permit corecta proporționare a grinzilor pereți.

FASIA. Dacă deschiderea este de câteva ori mai mică decât înălțimea, elementul de structură își pierde caracterul de grindă, devine o fâșie; aceasta este a doua limită între care se înscriu toate tipurile de grinzi.

Ca mod de lucru fâșia constituie o extrapolare a grinzii perete din care derivă. În majoritatea cazurilor sînt posibile simplificări cu caracter opus celor admise în teoria grinzilor lungi: neglijarea eforturilor normale din încovoiere, asimilarea cu efecte de forfecare pură, etc. (Fig.16)



- Succesiunea elementelor de structură "fir - fâșie" constituie una din principalele înlănțuiri logice din Teoria Structurilor (Fig.....)



FIR GR. FLEXIBILĂ GR. RIGIDĂ GRINDĂ MEDIE GR. PERETE FĂȘIE



SE POT ADOPTA
IPOTEEZE
SIMPLIFICATE
DE LA ORE
LA ACE
LA CAC

SE POT CONSIDERA
IPOTEEZE
DIN RM. ȘI T.C.
TEORIA
ELASTICITĂȚII

SE POT ADOPTA
IPOTEEZE
SIMPLIFICATE
DE LA ORE
LA ACE
LA CAC

SE POT CONSIDERA
IPOTEEZE
DIN RM. ȘI T.C.
TEORIA
ELASTICITĂȚII

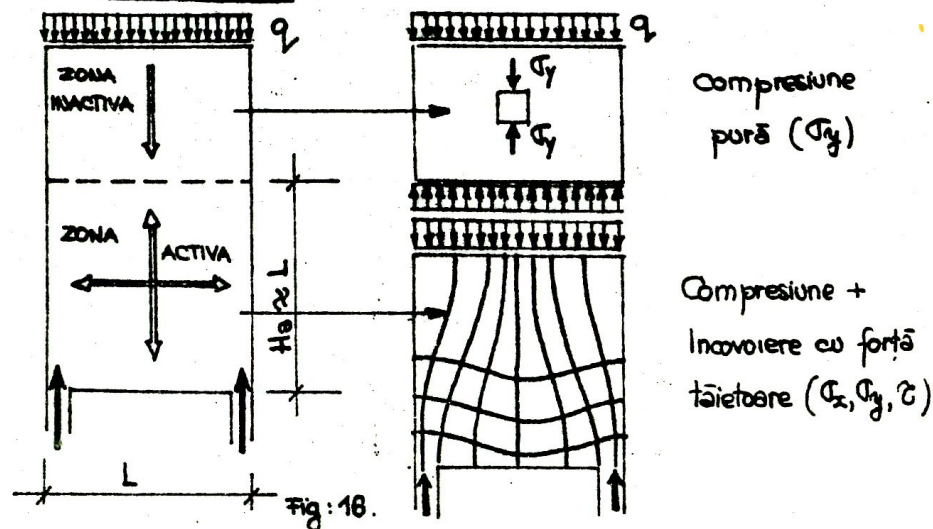
SE POT ADOPTA
IPOTEEZE
SIMPLIFICATE
DE LA ORE
LA ACE
LA CAC

SE POT CONSIDERA
IPOTEEZE
DIN RM. ȘI T.C.
TEORIA
ELASTICITĂȚII

SUCCESIUNEA FÎR-FIȘIE

2.2 GRINDA PERETE CU O DESCHIDERE

2.1 Zona activă



Zona activă H_a este porțiunea din grinda perete în care are loc devierea forțelor la rezemare prin încovoiere cu forță tăietoare (Fig: 16)

Zona activă se determină de la caz la caz în funcție de sistemul de încărcare și rezemare, aplicând legile simple ale trasecțiilor de scurgere a eforturilor.

-(Fig: 17 a). În această figură sarcina concentrată P definește pe înălțimea H trei zone distincte: activă (L), inactivă ($H-2L$), activă (L). În figura 17 b, c, sarcina P aplicată în mod diferit consolei scurte, se transmite la rezemul înalt în situația „b” cu o zonă inactivă iar în situație „c” fără zonă inactivă în funcție de modul detaliat de aplicare al forței P .

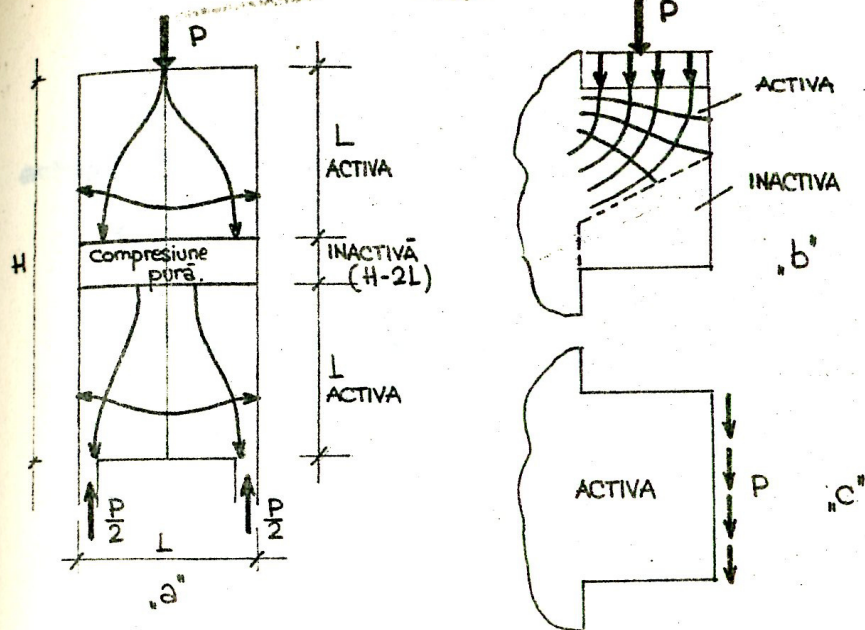


Fig: 17

2.2 Distribuția eforturilor în limitele ipotezelor

Teoriei Elasticității

Eforturile σ_x , σ_y și τ se determină pentru fiecare caz în parte cu metodele Teoriei Elasticității, metode care ies din cadrul cursului nostru. Rezultatele finale pot fi însă interpretate și extrapolate ca o generalizare a cunoscutei teorii a grinzii lungi.

Efortul normal σ_x . Brațul de pînghie al forțelor interioare.

- În axa deschiderii $Q = 0$, deci avem încovoiere pură.
- Eforturile σ_x se distribuie nelinear cu abateri mari față de distribuția Navier.
- Axă neutră coboară
- Efortul maxim de întindere este mai mare decât cel dat de formula Navier.

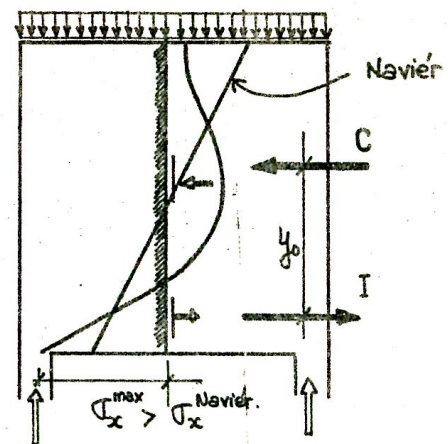


Fig: 18

- Rezultantele forțelor interioare constituie un cuplu cu brațul de pînghie y_0 conform relației:

$$M^{\max} = C \cdot y_0 = I \cdot y_0$$

- Dacă pentru armarea grinzilor de beton armat ne mulțumim cu o tratare aproximativă și acoperitoare atunci rezultanta eforturilor de întindere Ia poate servi drept punct de pornire pentru determinarea armăturii fundamentale

$$A_a = \frac{I_a \cdot c}{\sigma_y}$$

c : coeficient de siguranță adaptat la condițiile specifice rolului grinzii perete în contextul structurii.

Efortul tangential τ . Efectul lătimii reazemului

- Forța tăietoare maximă $Q^{\max}$ are loc la limita interioară a reazemului.
- Eforturile τ se distribuie după o lege nelineară cu abateri mari ca formă și valoare față de formula lui Juravski.
- Efortul tangential maxim este mai mare decât cel determinat cu formula lui Juravski și se apropie de partea inferioară a grinzii (spre reazem).

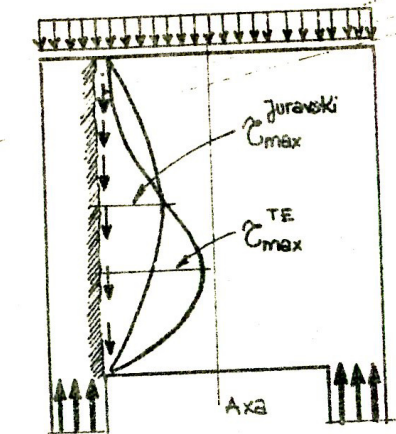


Fig: 19

- Eforturile principale de întindere sînt direct influențate de valoarea lui σ_{max} .

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

- Dacă lățimea reazemului se micșorează, forța tăietoare crește. În consecință este de așteptat ca să crească și efortul tangențial maxim.

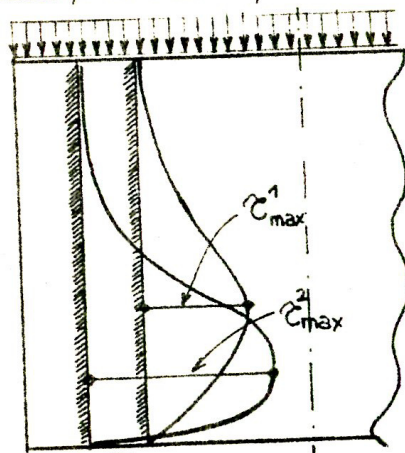


Fig: 20

Teoria arată însă, că această creștere nu este proporțională cu creșterea forței tăietoare ci mult mai rapidă.

Este un fel de concentrare de eforturi tangențiale și respectiv principale.

$$\frac{Q_2^{max}}{Q_1^{max}} = \alpha > 1$$

$$\frac{\tau_2^{max}}{\tau_1^{max}} \gg \alpha$$

Din toate punctele de vedere adoptarea unei lățimi convenabile de reazem este de dorit.

Efortul normal σ_y

În baza ipotezei continuității materiei, suportul geometric al Teoriei Elasticității, eforturile, deformările, și deplasările rezultă de asemenea funcții continue. Această continuitate devine foarte sugestivă și logică cînd este urmărită în succesiunea de diagrame de eforturi σ_y pe înălțimea zonei active. În secțiunile marginale AB și CD (Fig: 21 și Fig 13) eforturile σ_y se confundă cu diagramele dreptunghiulare ale forțelor exterioare (q și q_1)

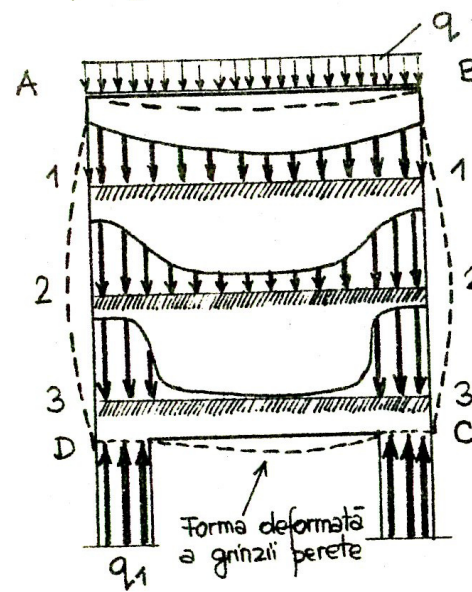


Fig: 21

În secțiunile intermediare (1-1, 2-2, 3-3) diagramele se modifică treptat, treptat, tinzînd să se confunde în secțiunea de graniță CD cu cele două dreptunghiuri q_1 .

Neglijat în teoria grinzilor lungi ca fiind efort secundar, efortul σ_y a devenit de același ordin de mărime cu eforturile σ_x și τ , influențînd profund stările de tensiune, traiectoriile, deformarea

de ansamblu și comportarea grinzilor perete în general.

Subzona intens activă

Din examinarea diagramei celor trei eforturi (σ_x , σ_y , τ), rezultă că valorile maxime se situează în jumătatea inferioară a grinzii perete. (Fig: 22)

Pe drept cuvînt această jumătate poate fi definită ca fiind partea intens activă a zonei active. În contextul structurilor

acestei zone va trebui să i se acorde o atenție deosebită.

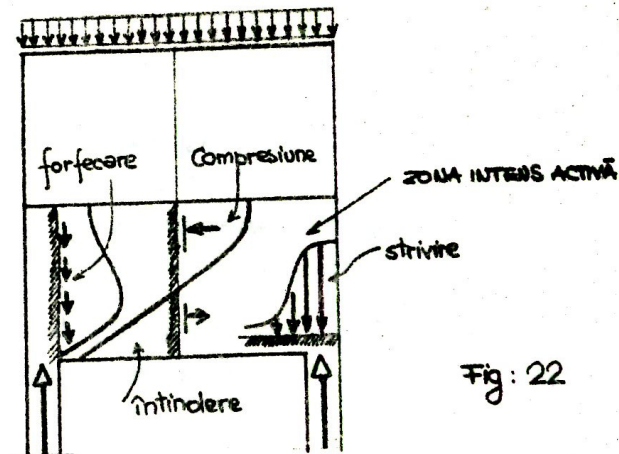


Fig: 22

Macazul forțelor interioare (MFI)

Concept deosebit de intuitiv, a fost introdus pentru a caracteriza, global modul de lucru al grinzilor pereti în zona lor activă.

"Macazul" se obține prin schematizarea traiectoriilor de scurgere a eforturilor cu vectori rezultanti (Fig: 23)

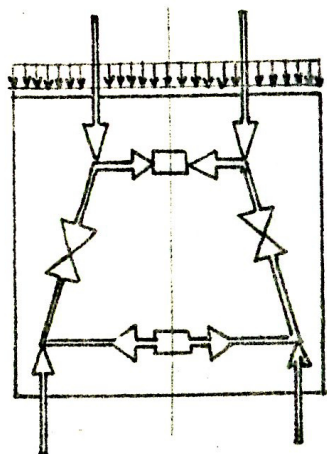


Fig: 23

Printr-o tratare convenabilă MFI poate deveni un pretios instrument de înțelegere și proiectare.

3. GRINZI PERETI CONTINUE.

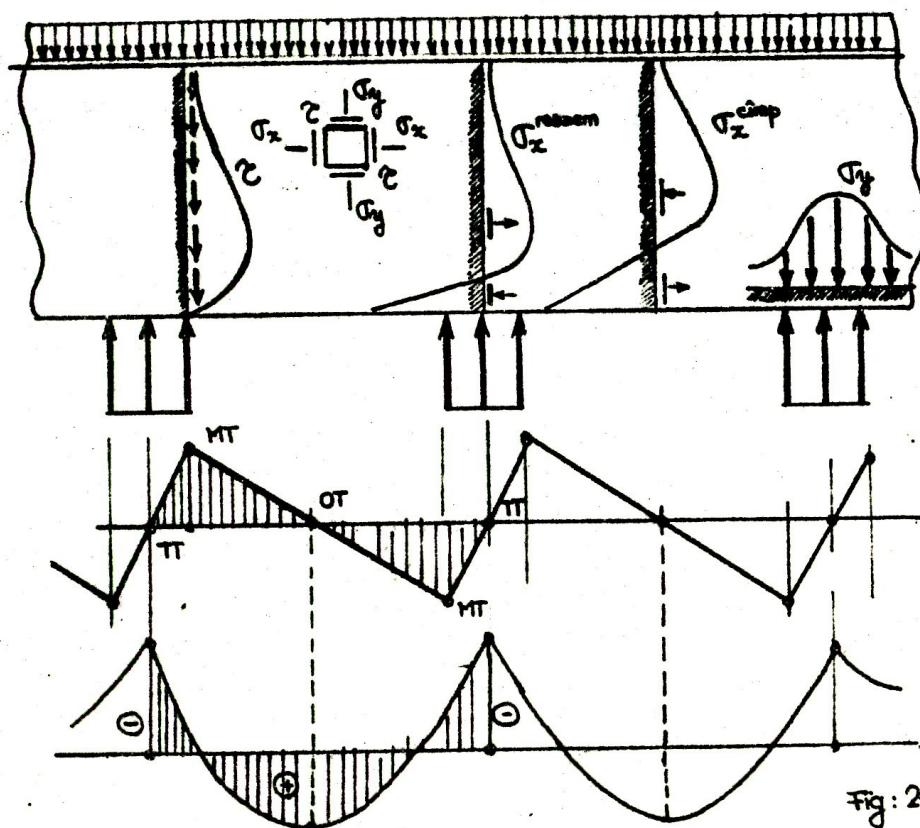


Fig: 24

La o grindă continuă, eforturile σ_x , σ_y , τ se deduc cu destulă exactitate din confruntarea diagramelor de eforturi sectionale Q , M , cu elementele cunoscute de la grinzile pereti cu o singură deschidere (Fig: 24)

4. EFECTUL DE GRINDA PERETE.

Grinzi pereti izolate, în formă pură se întâlnesc rar în practică. În marea majoritate a cazurilor, datorită spațialității structurilor există efecte de grindă perete combinate cu alte efecte.

Urmărind cu atenție drumul forțelor aceste efecte de grindă perete pot fi ușor detectate.

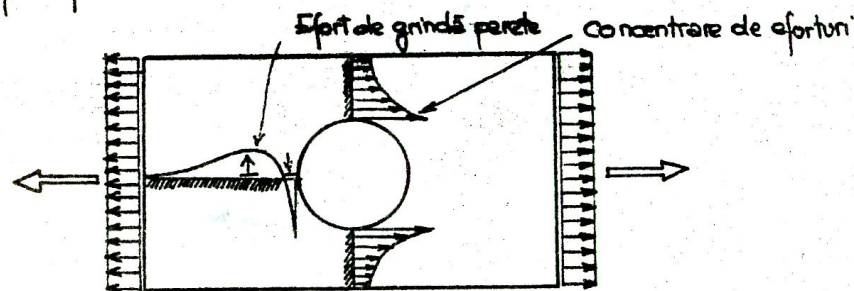
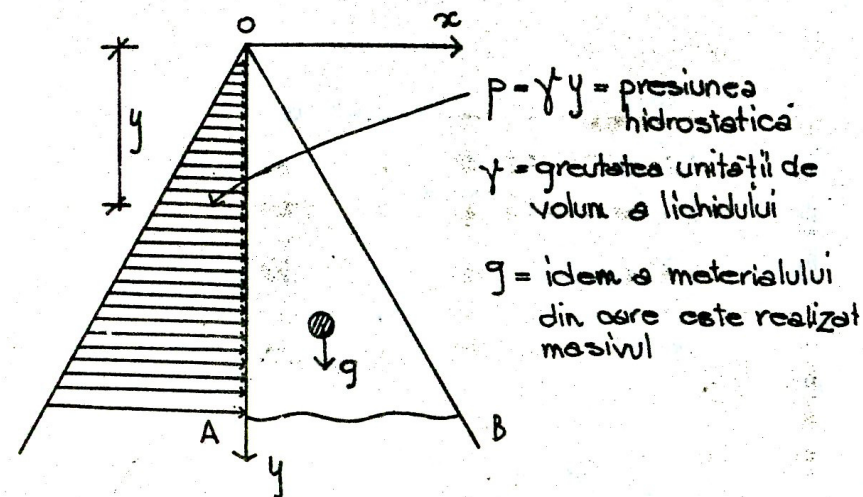


Fig: 25

Un exemplu banal îl oferă întinderea sau compresiunea axială a unei fișii cu un gol circular (Fig: 25)



3. CONSOLA TRIUNGHILARĂ ACȚIONATĂ DE O ÎNCĂRCARE TRIUNGHILARĂ

Deși se rezolvă cu cele mai elementare mijloace ale T.E. problema în sine are o mare valoare practică. Ea permite să se facă o comparație între modul de abordare al problemelor în R.M. și T.E. precum și interpretarea unor rezultate obținute pe căi esențial diferite.

Masivul OAB se consideră foarte lung după axul oz și încărcat la fel pe întreaga lungime. În acest context se izolează o „pană” triunghiulară de grosime unitară ($\rho = 1$) și se studiază ca o problemă plană.

Funcția eforturilor în acest caz (funcția Airy) este de forma :

$$\omega(x, y) = \frac{A}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{B}{2} x^2 y + \frac{C}{2} x y^2 + \frac{D}{3 \cdot 2} y^3$$

Se remarcă direct că ecuația diferențială a problemei plane (în derivate parțiale) este satisfăcută :

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \equiv 0$$

Cele patru constante se determină din condițiile de contur pe OA și OB :

Pe latura OA :

$$x = 0 ; y \rightarrow \text{variabil}$$

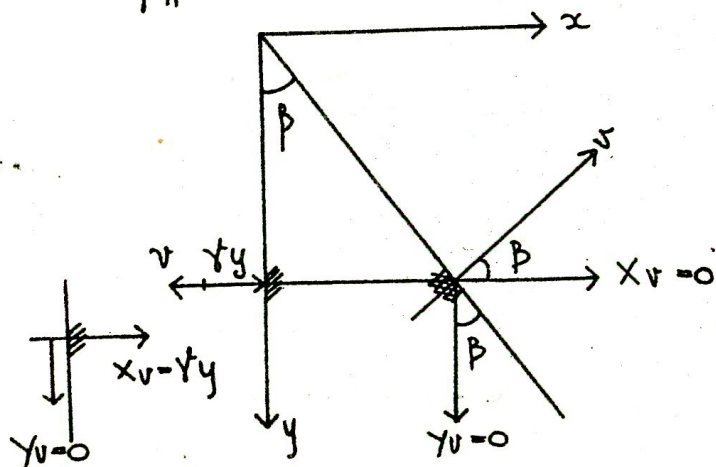
$$X_v = p ; Y_v = 0$$

$$y_h$$

Pe latura OB

$$x = y \tan p ; y \rightarrow \text{variabil}$$

$$X_v = 0 ; Y_v = 0$$



Expresia generală a eforturilor :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = Cx + Dy ; \sigma_y = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = Ax + By$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - qx = -Bx - Cy - qx$$

intervine numai dacă există o încărcare de volum (masică).

$$\rho y = q.$$

EXPLOATAREA CONDIȚIILOR PE CONTUR

(a) PE LATURA OA.

$$\cos(\hat{r}, x) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\cos(\hat{r}, y) = \cos 90^\circ = 0$$

$$x_v = y_v = \sigma_x \cos(\hat{r}, x) + \tau_{xy} \cos(\hat{r}, y) - Dy x(-1)$$

$$\boxed{D = -y}$$

$$y_v = 0 = \tau_{yx} \cos(\hat{r}, x) + \sigma_y \cos(\hat{r}, y) = -Cy$$

$$\boxed{C = 0}$$

În această etapă eforturile devin:

$$\sigma_x = -\gamma y \text{ (complet definit)}$$

$$\sigma_y = Ax + By$$

$$\tau_{xy} = -(B + g)x$$

(b) PE LATURA OB

$$X_v = 0 = \sigma_x \cos(\hat{v}, \hat{x}) + Bxy \cos(\hat{v}, \hat{y})$$

$$Y_v = 0 = \tau_{xy} \cos(\hat{v}, \hat{x}) + \sigma_y \cos(\hat{v}, \hat{y})$$

$$\cos(\hat{v}, \hat{x}) = \cos \beta$$

$$\cos(\hat{v}, \hat{y}) = \cos(90^\circ + \beta) = -\sin \beta$$

Din prima condiție rezultă:

$$-\gamma y \cos \beta + (B + g) \gamma \sin \beta = 0$$

$$(B + g) = \frac{\gamma}{\tan^2 \beta}$$

$$B = \frac{\gamma}{\tan^2 \beta} - g$$

Din a doua condiție rezultă:

$$-(B + g) \gamma \sin \beta - (Ax + By) \sin \beta = 0$$

$$-(B + g) \gamma \sin \beta - (A \gamma \tan \beta + B \gamma) \sin \beta = 0$$

$$-(B + g) - A \tan \beta - B = 0$$

$$A = \left(\frac{g}{\tan \beta} - \frac{2\gamma}{\tan^3 \beta} \right)$$

RECAPITULAREA EFORTURILOR

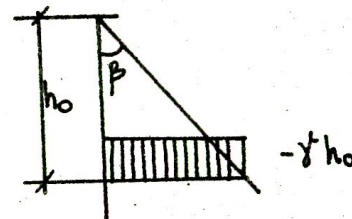
$$\sigma_x = -\gamma y ; \tau_{xy} = \frac{\gamma x}{\tan^2 \beta}$$

$$\sigma_y = \left(\frac{g}{\tan \beta} - \frac{2\gamma}{\tan^3 \beta} \right) x + \left(\frac{\gamma}{\tan^2 \beta} - g \right) y$$

DISCUTIA EFORTURILOR LA COTA $y = h_0$

a) Efortul σ_x de apăsare directă:

$$\sigma_x = -\gamma y = -\gamma h_0 = \text{ct}$$

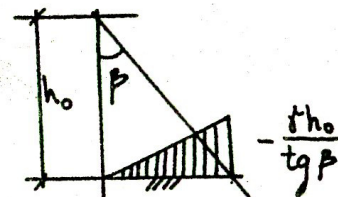


$\rightarrow \square \leftarrow \sigma_x = -\gamma h_0$
(compresiv).

b) Efortul tangential τ_{xy}

$$\tau_{xy} = -\frac{\gamma x}{\tan^2 \beta}$$

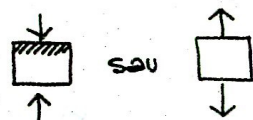
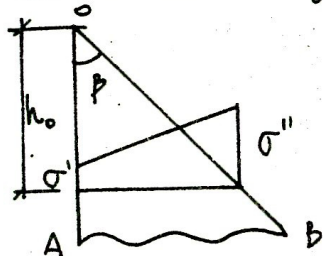
$$x = 0 \rightarrow \tau = 0 ; x = h_0 \tan \beta \rightarrow \tau = -\frac{\gamma h_0}{\tan \beta}$$



$\downarrow \square \uparrow$

Cu cât β este mai mic (se ascute panta) cu atât τ_{max} este mai mare.

c) Efortul normal σ_y



$$\sigma' = \left(\frac{\gamma}{\tan^2 \beta} - g \right) h_0 \rightarrow \text{Poate fi compresiune sau intindere}$$

$$\sigma'' = -\frac{\gamma h_0}{\tan^2 \beta} \rightarrow \text{intotdeauna compresiune.}$$

CONDITIA DE EFORTUL PE OA

$$\sigma' = 0$$

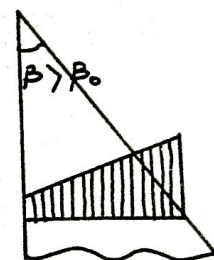
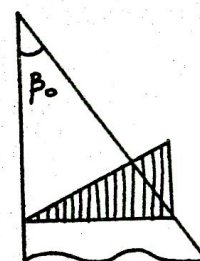
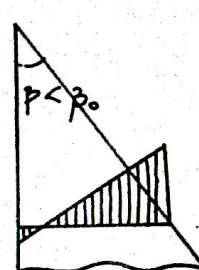
$$\tan \beta = \sqrt{\frac{\gamma}{g}} \rightarrow \beta = \beta_0$$

Pentru γ și g date corespunde un anumit unghi β pentru care $\sigma' = 0$

$\beta < \beta_0$ apare intindere ($\sigma' > 0$)

$\beta = \beta_0$... $\sigma' = 0$

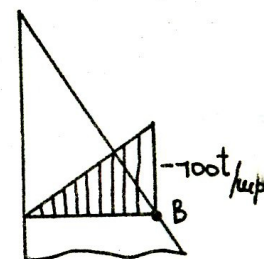
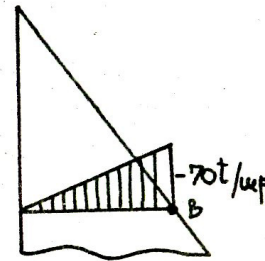
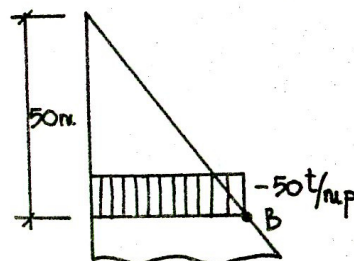
$\beta > \beta_0$... $\sigma' < 0 \rightarrow$ compresiune



Exemplu.

$$\gamma = 7 \text{ t/m}^3; g = 2 \text{ t/m}^3; h_0 = 50 \text{ m}$$

$$\tan \beta_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{g}} = 0,707; \beta \approx 35^\circ$$



$$\sigma_x = -50 \text{ t/m}^2$$

$$\tau_{xy}^{\max} = -70,7 \text{ t/m}^2$$

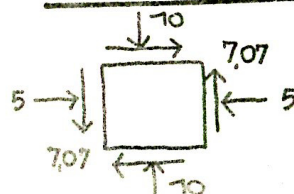
$$\sigma_y^{\max} = -100 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_x = -5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau^{\max} = -7,07 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_y^{\max} = -10 \text{ kg/cm}^2$$

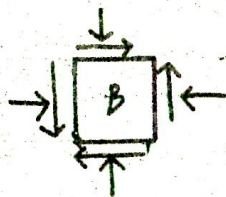
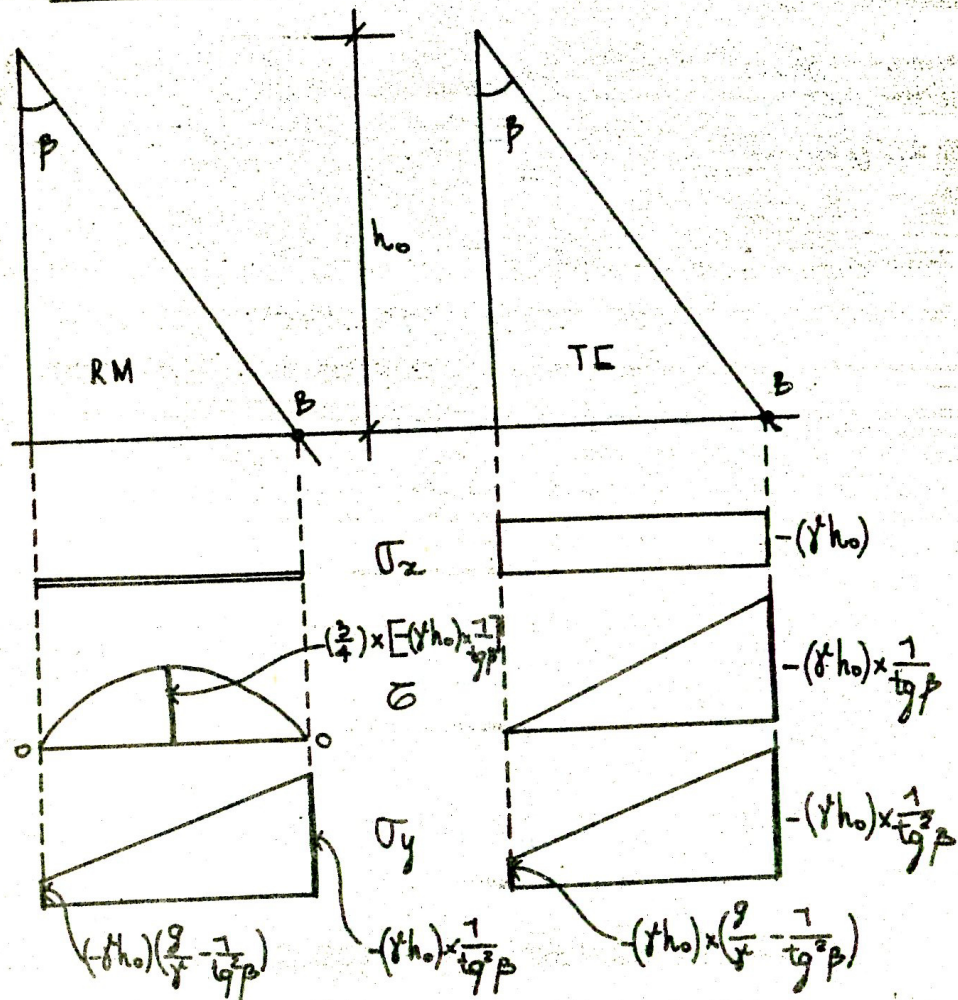
STAREA DE TENSIUNE ÎN B



Se poate verifica că secțiunea înclinată la $\beta = 35^\circ$ este principală

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times 7,07}{-5 - (-10)} = 2,83 \rightarrow \theta \approx 35^\circ$$

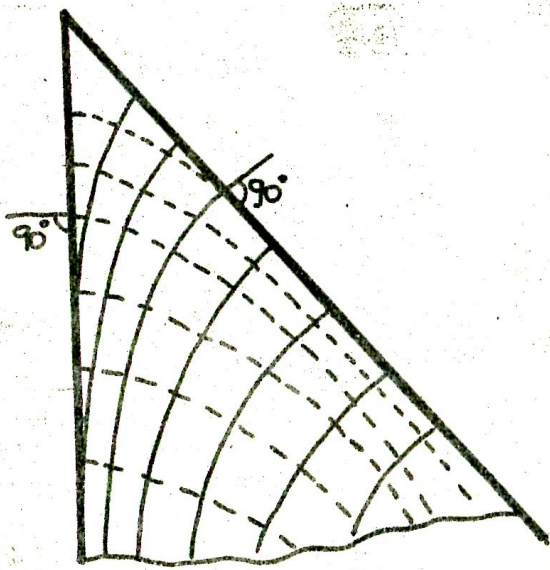
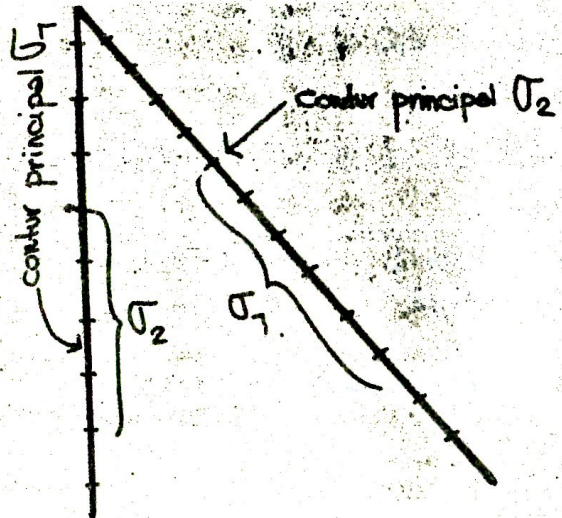
COMPARATIE :



NOTA :

Acest pătrat nu poate fi principal = contradicție

TRAIECTORIILE EFORTURILOR NORMALE PRINCIPALE



CONCLUZII :

1) Valorile maxime ale eforturilor σ_x, σ_y, τ determinate cu ajutorul TE sînt comparabile între ele și în consecință nu poate fi neglijat nici unul din cele trei eforturi în raport cu celelalte două.

Ipoteza $\sigma_z \approx 0$ din RM aici nu poate fi admisă.

2) Eforturile tangențiale determinate cu formula lui Juravski diferă atât ca lege de distribuție cât și ca valori maxime. În general formula lui Juravski nu se aplică la elemente de structură cu înălțime variabilă.

3) Trajectoriile eforturilor principale determinate prin RM diferă esențial de cele determinate prin TE și conțin contradicții.

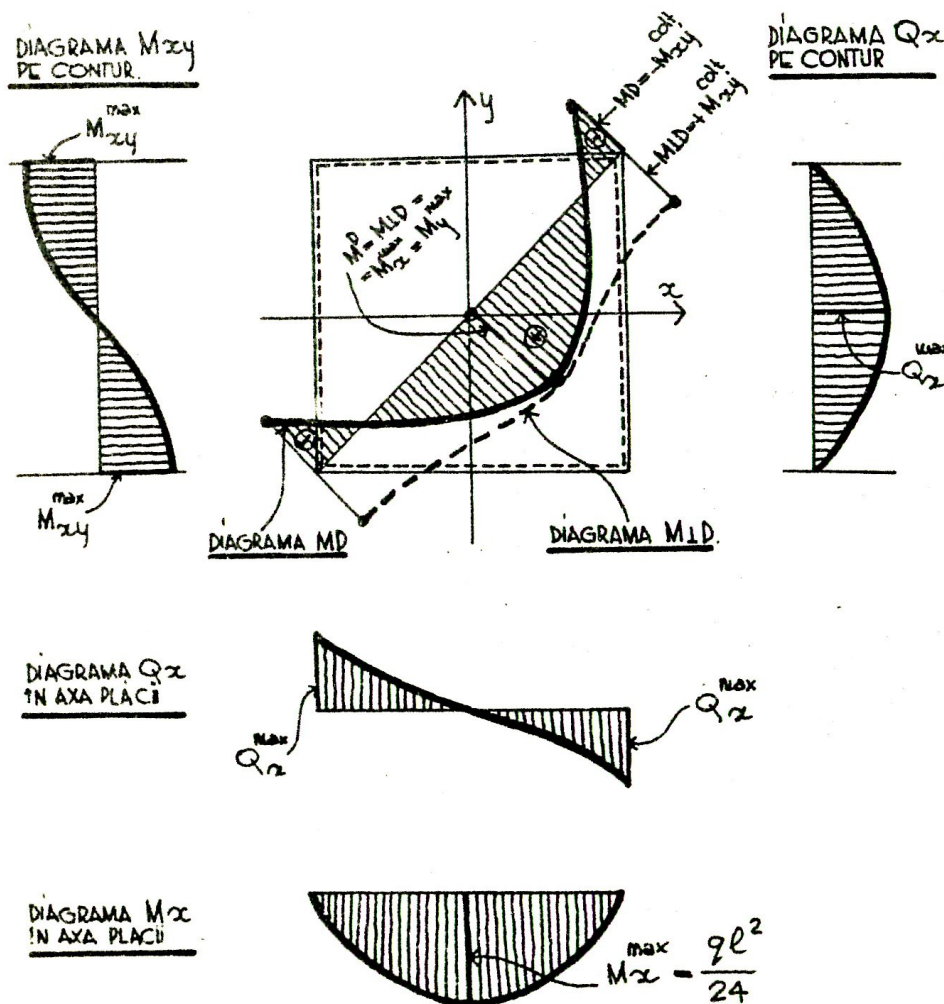
4) Soluția obținută prin TE este punctul de pornire pentru proiectarea masivelor triunghiulare sau aproape triunghiulare la încărcări exterioare triunghiulare.

PRINCIPALELE TIPURI DE BARAJE

1. Baraje de pământ și anrocamente
2. Baraje în arc
3. Baraje de greutate
4. Baraje cu contraforti.

4. PLACA PATRATĂ SIMPLU REZEMATĂ PE CONTUR

CAZUL ÎNCĂRĂRII UNIFORM DISTRIBUITE
 $q = \text{ct.}$



Teoria plăcilor încărcate cu sisteme de forțe arbitrare conduce la dezvoltări ample indiferent de metoda de rezolvare aplicată : serii simple sau duble, metode variationale, diferite finite, elementul finit. Pentru plăcile simplu rezemate pe contur încărcate cu sarcini distribuite continuu modul de comportare a fost obținut pe cazul simplu studiat mai sus (încărcarea bisinusoidală). Deosebire în ultima analiză se limitează la valorile maxime de dimensionare. Astfel pentru o placă patrată încărcată cu o sarcină uniform distribuită momentul maxim în centrul plăcii este :

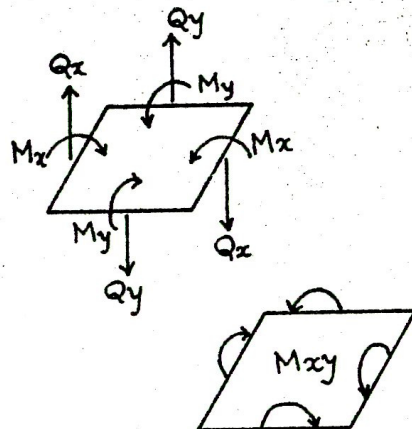
$$M_x^{\max} = M_y^{\max} = \frac{q l^2}{24} \quad (\mu = \frac{1}{6})$$

În cele ce urmează sînt anexate cîteva tipuri de tabele de calcul pentru încărcarea uniform distribuită.

Din examinarea valorilor intabulate se constată că pentru aceeași valoare $\alpha = \frac{b}{a} = 1$ momentele maxime au valori diferite în funcție de valoarea admisă pentru $\mu(0; \frac{1}{6}; 0.3)$ și metoda de calcul aplicată.

PLACA PĂTRATĂ. ÎNCĂRCARE UNIFORM DISTRIBUITĂ.
SIMPLA REZEMARE PE CONTUR.

IV	III	II	I						
V	3	2	1						
VI	6	5	4						
VII	9	8	7						



Ret.	M_x	M_y	M_{xy}	M_D	M_{+D}	V
1	0,0195	0,0252	0,0060			
2	0,0185	0,0206	0,0181			
3	0,0123	0,0123	0,0282	-0,0159	+0,0405	
4	0,0338	0,0376	0,0041			
5	0,0314	0,0314	0,0119	+0,0195	+0,0433	
6						
7	0,0413	0,0413	0,0014	+0,0399	+0,0427	
I			0,0067			0,282
II			0,0204			0,254
III			0,0324			0,161
IV			0,0372	-0,0372	+0,0372	0,000
	$q\ell^2$	$q\ell^2$	$q\ell^2$	$q\ell^2$	$q\ell^2$	$q\ell$

DIN 2

PLACA DREPTUNGHILARĂ. DUPĂ GALERKIN.

$\mu = 0,3 \rightarrow \alpha \ell$

$\alpha = \frac{a}{b}$	$W = \frac{q a^4}{E \ell^3}$	$M_x^{max} = \alpha_x q a^2$	$M_y^{max} = \alpha_y q a^2$	$Q_x = \beta_x q a$	$Q_y = \beta_y q b$	$R = m q a b$
	μ	α_x	α_y	β_x	β_y	m
1,0	0,044	0,048	0,048	0,338	0,338	0,065
1,5	0,084	0,081	0,050	0,424	0,242	0,057
2,0	0,111	0,102	0,046	0,465	0,185	0,046
5,0	0,141	0,125	0,0375	0,500	0,074	0,019
∞	0,142	0,125	0,0375	0,500	-	-
		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} \times (0,3)$	$\frac{1}{2}$		

OBSERVAȚII

1 - Cea mai rigidă placă este placa pătrată.

2 - Pentru $\alpha = \infty$:

$M_x = \frac{1}{8} q a^2$ (moment de grindă)

$M_y = \mu M_x$ ($\frac{0,3}{8} = 0,0375$)

$Q_x = \frac{1}{2} q a$ (transport de grindă)

$Q_y = 0$ (transport nul)

a: b		0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
Multiplier		$f \times \frac{pa^4}{D}$					$M \times pa^2$
Schema I	f	0,01013	0,00865	0,00726	0,00603	0,00498	0,00406
	M_a	0,0965	0,0820	0,0683	0,0560	0,0456	0,0368
	M_b	0,0174	0,0243	0,0298	0,0334	0,0359	0,0368
Schema II	f	0,00488	0,00452	0,00407	0,00366	0,00323	0,00279
	M_a^0	-0,1213	-0,1160	-0,1087	-0,1007	-0,0924	-0,0847
	M_a	0,0584	0,0538	0,0485	0,0428	0,0372	0,0318
	M_b	0,0060	0,0104	0,0151	0,0188	0,0221	0,0243
Schema III	f	0,00262	0,00253	0,00240	0,00227	0,00212	0,00192
	M_a^0	-0,0847	-0,0838	-0,0816	-0,0782	-0,0745	-0,0698
	M_a	0,0413	0,0401	0,0380	0,0350	0,0319	0,0286
	M_b	0,0017	0,0042	0,0075	0,0103	0,0135	0,0158
Schema IV	f	0,00468	0,00418	0,00360	0,00308	0,00257	0,00210
	M_a^0	-0,1184	-0,1091	-0,0988	-0,0875	-0,0773	-0,0674
	M_b^0	-0,0784	-0,0776	-0,0766	-0,0747	-0,0711	-0,0674
	M_a	0,0559	0,0496	0,0426	0,0355	0,0291	0,0234
	M_b	0,0072	0,0126	0,0174	0,0203	0,0226	0,0234
Schema V	f	0,00450	0,00384	0,00317	0,00258	0,00204	0,00157
	M_a^0	-0,1126	-0,1018	-0,0887	-0,0758	-0,0644	-0,0545
	M_b^0	-0,0780	-0,0770	-0,0745	-0,0704	-0,0654	-0,0597
	M_a	0,0535	0,0452	0,0369	0,0290	0,0223	0,0168
	M_b	0,0098	0,0153	0,0197	0,0225	0,0230	0,0228
Schema VI	f	0,00251	0,00234	0,00208	0,00182	0,00154	0,00128
	M_a^0	-0,0813	-0,0782	-0,0723	-0,0652	-0,0580	-0,0506
	M_b^0	-0,0559	-0,0562	-0,0561	-0,0551	-0,0532	-0,0506
	M_a	0,0399	0,0366	0,0321	0,0271	0,0222	0,0176
	M_b	0,0038	0,0076	0,0116	0,0114	0,0165	0,0176

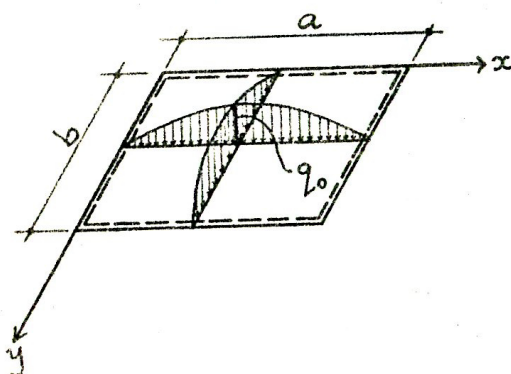
NOTA: Indicare a din M_a și M_b , orata ca momentul se refera la reazeme.

a: b		1,00	1/0,90	1/0,80	1/0,70	1/0,60	1/0,50
Multiplier		$f \times \frac{pa^4}{D}$					$M \times pa^2$
Schema I	f	0,00406	0,00498	0,00603	0,00726	0,00865	0,01013
	M_a	0,0368	0,0359	0,0334	0,0298	0,0243	0,0174
	M_b	0,0368	0,0456	0,0560	0,0683	0,0820	0,0965
Schema II	f	0,00279	0,00361	0,00463	0,00593	0,00750	0,00927
	M_a^0	-0,0847	-0,0926	-0,1015	-0,1101	-0,1170	-0,1218
	M_a	0,0318	0,0330	0,0325	0,0310	0,0268	0,0204
	M_b	0,0243	0,0322	0,0424	0,0554	0,0707	0,0881
Schema III	f	0,00192	0,00261	0,00355	0,00479	0,00644	0,00844
	M_a^0	-0,0698	-0,0799	-0,0902	-0,1018	-0,1107	-0,1213
	M_a	0,0286	0,0306	0,0318	0,0319	0,0292	0,0234
	M_b	0,0158	0,0224	0,0316	0,0445	0,0602	0,0799
Schema IV	f	0,00210	0,00257	0,00308	0,00360	0,00418	0,00468
	M_a^0	-0,0674	-0,0711	-0,0747	-0,0766	-0,0776	-0,0784
	M_b^0	-0,0674	-0,0773	-0,0875	-0,098	-0,1091	-0,1184
	M_a	0,0234	0,0226	0,0203	0,0174	0,0126	0,0072
	M_b	0,0234	0,0291	0,0355	0,0426	0,0496	0,0559
Schema V	f	0,00157	0,00183	0,00205	0,00224	0,0242	0,00254
	M_a^0	-0,0545	-0,0554	-0,0564	-0,0565	-0,0562	-0,0559
	M_b^0	-0,0597	-0,0660	-0,0717	-0,0771	-0,0811	-0,0835
	M_a	0,0168	0,0151	0,0125	0,0091	0,0059	0,0027
	M_b	0,0228	0,0267	0,0311	0,0350	0,0384	0,0407
Schema VI	f	0,00128	0,00154	0,00182	0,00208	0,00234	0,00251
	M_a^0	-0,0506	-0,0532	-0,0551	-0,0561	-0,0562	-0,0559
	M_b^0	-0,0506	-0,0580	-0,0652	-0,0723	-0,0782	-0,0818
	M_a	0,0176	0,0165	0,0144	0,0116	0,0076	0,0038
	M_b	0,0176	0,0222	0,0271	0,0321	0,0366	0,0399

NOTA: Indicare a din M_a și M_b , orata ca momentul se refera la reazeme (negativ).

EXEMPLU Placă dreptunghiulară simplu rezemată pe contur și încărcată cu o sarcină bisinusoidală.

$$q(x,y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$



Deși la prima vedere acest tip de încărcare nu are un corespondent practic, din punct de vedere didactic el permite să se tragă toate concluziile privind modul

de lucru al plăcilor simplu rezemate pe contur încărcate cu sarcini distribuite continuu, de tip gravitațional. Funcția deplasărilor $w(x,y)$ se va căuta sub forma,

$$w(x,y) = w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

care intuitiv corespunde modului probabil de deformare.

Funcția propusă trebuie să verifice:

- (1) - condițiile de rezemare pe contur și
- (2) - ecuația diferențială a plăcilor plane

LAGRANGE - SOPHIE GERMAINE

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{w(x,y)}{D}$$

$$D = \text{rigiditatea plăcii} = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$$

Condiția de simplă rezemare se exprimă ca și la grinzi: săgeată nulă ($w_{\text{contur}} = 0$) și moment nul.

În cazul de față aceste condiții sînt respectate în mod evident.

Din satisfacerea ecuației SOPHIE GERMAINE se determină constanta w_0 care reprezintă săgeata maximă din mijlocul deschiderii ($x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\pi^4}{a^4} w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 2 \frac{\pi^4}{a^2 b^2} w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\pi^4}{b^4} w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$\pi^4 w_0 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = \frac{q_0}{D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$w_0 = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}$$

Ecuația suprafeței mediane deformate devine:

$$w(x,y) = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Funcția $w(x,y)$ fiind cunoscută, eforturile sectionale se determină prin simplă derivare:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = +D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Aceste relații au caracter absolut general; în cazul de față eforturile devin:

$$M_x = \frac{q_0 \left(\frac{1}{a^2} + \mu \frac{1}{b^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$M_y = \frac{q_0 \left(\frac{1}{b^2} + \mu \frac{1}{a^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$M_{xy} = \frac{q_0 (1-\mu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

$$Q_x = \frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$Q_y = \frac{q_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

CAZUL PLĂCII PĂTRATE

$$a=b=l$$

Toate relațiile obținute mai sus se simplifică după cum urmează:

$$W = \frac{q_0 l^4}{4\pi^4 D} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l}$$

$$W_0 = \frac{q_0 l^4}{4\pi^4 D} = \text{săgeată maximă}$$

$$M_x = M_y = \frac{(1+\mu) q_0 l^2}{4\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l}$$

$$Q_x = \frac{q_0 l}{2\pi} \cos \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l}$$

$$Q_y = \frac{q_0 l}{2\pi} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l}$$

$$M_{xy} = (1-\mu) \frac{q_0 l^2}{4\pi^2} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l}$$

Cu aceste relații pot fi construite toate diagramele de eforturi sectionale în zonele în care acestea sînt caracteristice.

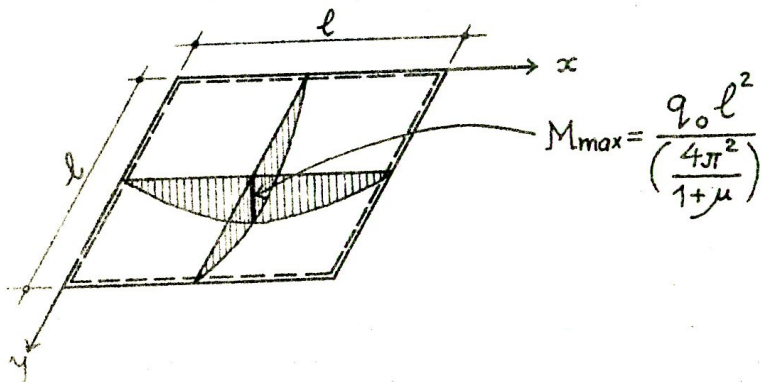
DIAGrameLE MOMENTELOR ÎNCOVOIETOARE

Pentru valori impuse a lui x (sau y), diagramele momentelor încovoietoare rezultă sinusoidale; bucla de sinus cu cea mai mare amplitudine este cea din axa grinzii. Momentul maxim din centrul plăcii are valoarea:

$$M_x^{\max} = M_y^{\max} = \frac{q_0 l^2}{\left(\frac{4\pi^2}{1+\mu}\right)} = \frac{q_0 l^2}{k}$$

Pentru beton armat $\mu = \frac{1}{6}$,

$$M_x^{\max} = M_y^{\max} \approx \frac{q_0 l^2}{34}$$

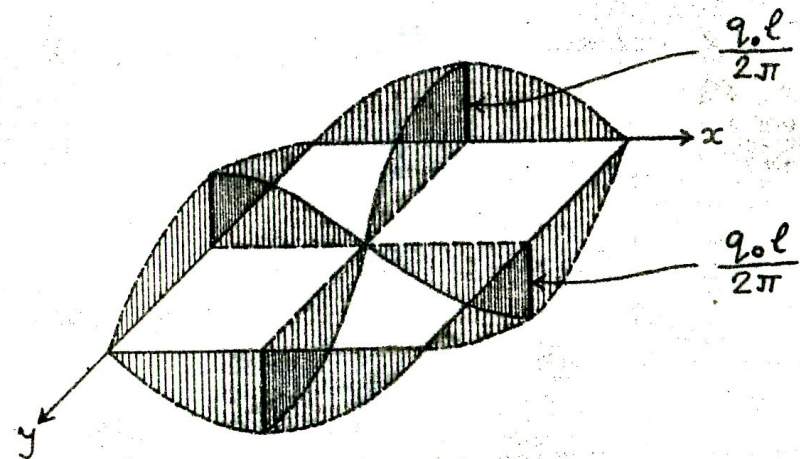


Momentele încovoietoare au rezultat pozitive pentru întreaga placă; întreaga față de jos este întinsă după ox și oy , și întreaga față de sus a plăcii este comprimată după ox și oy .

DIAGrameLE FORTELOR TĂIETOARE

De-a lungul unei secțiuni paralele cu ox sau oy forțele tăietoare variază cosinusoidal. Diagramele cu amplitudinea maximă au loc în dreptul axelor de simetrie iar valorile maxime sînt pe reazeme. În lungul celor patru reazeme (de contur) variația este sinusoidală; forța tăietoare maximă are loc în dreptul axelor de simetrie,

$$Q_x^{\max} = Q_y^{\max} = \frac{q_0 l}{2\pi} = \frac{q_0 l}{k''}$$



Axa $x = \frac{l}{2}$ reprezintă originea transportului de forțe pentru direcția ox , iar axa $y = \frac{l}{2}$ originea transportului de forțe pentru direcția oy .

DIAGrameLE MOMENTELOR DE RĂSUCIRE PE CONTURUL PLĂCII

Se remarcă din relațiile obținute pentru M_{xy} că cele mai mari valori se dezvoltă în colțurile plăcii:

$$M_{xy}^{\max} = \frac{q_0 l^2}{\left(\frac{4\pi^2}{1-\mu}\right)} = \frac{q_0 l^2}{k'}$$

$$k' = \frac{1-\mu}{1+\mu} = \frac{1-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{6}} = \frac{5}{7} \approx 0,70$$

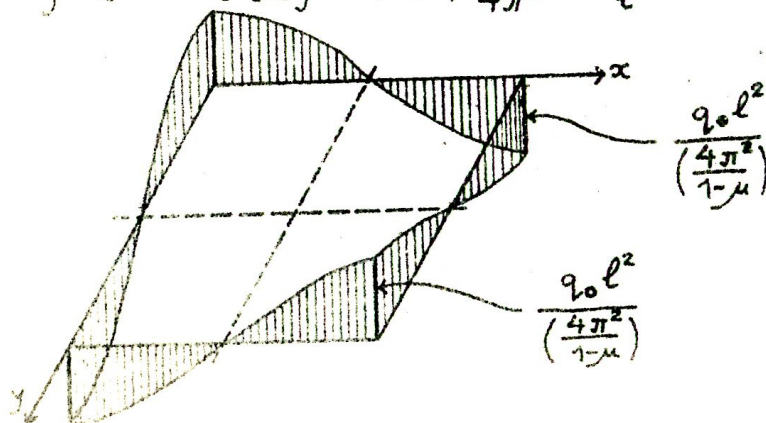
Pe conturul plăcii variația momentelor de răsucire este cosinusoidală,

$$x=0 \quad M_{xy} = (1-\mu) \frac{q_0 l^2}{4\pi^2} \cos \frac{\pi y}{l}$$

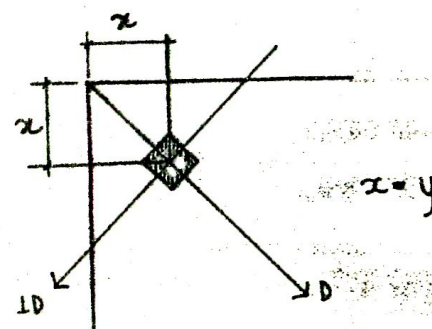
$$x=l \quad M_{xy} = -(1-\mu) \frac{q_0 l^2}{4\pi^2} \cos \frac{\pi y}{l}$$

$$y=0 \quad M_{xy} = (1-\mu) \frac{q_0 l^2}{4\pi^2} \cos \frac{\pi x}{l}$$

$$y=l \quad M_{xy} = -(1-\mu) \frac{q_0 l^2}{4\pi^2} \cos \frac{\pi x}{l}$$



EFORTURILE ÎN SECȚIUNILE REPERATE CU DIAGONALA PLĂCII ȘI PERPENDICULARA PE DIAGONALA



Din motive de simetrie pe aceste secțiuni momentele de torsiune sînt nule iar momentele încovoietoare se determină cu relații simple:

$$\begin{aligned} M^D &= M_x - M_{xy} \\ M^{\perp D} &= M_x + M_{xy} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{se obțin din teoria} \\ \text{generală a plăcilor} \\ \text{plane.} \end{array} \right.$$

$$M_x = \frac{(1-\mu) q_0 l^2}{4\pi^2} \sin^2 \frac{\pi x}{l}$$

$$M_{xy} = \frac{(1-\mu) q_0 l^2}{4\pi^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l}$$

În colțuri: $x=y=0$

$$M_x = 0, \quad M_{xy} = \frac{(1-\mu) q_0 l^2}{4\pi^2}$$

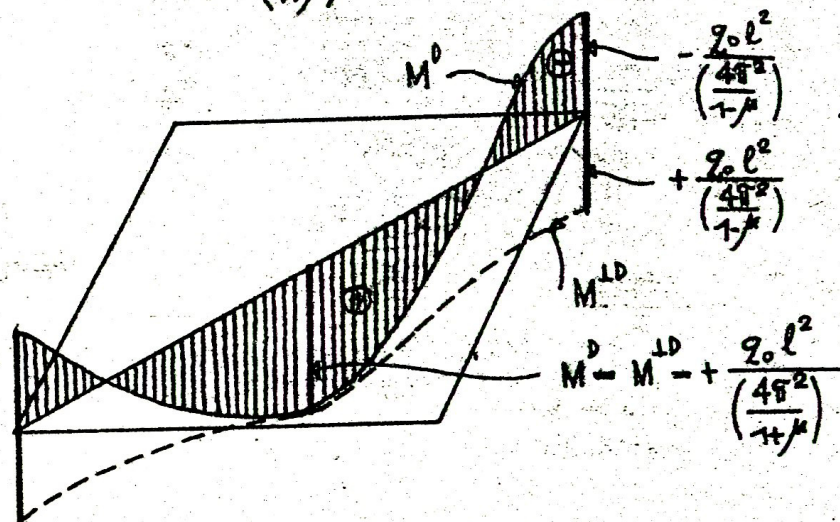
$$M^D = - \frac{(1-\mu) q_0 l^2}{4\pi^2} = - M_{xy}^{\max} \quad (\text{în colț})$$

$$M^{\perp D} = + \frac{(1-\mu) q_0 l^2}{4\pi^2} = + M_{xy}^{\max}$$

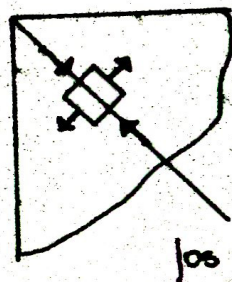
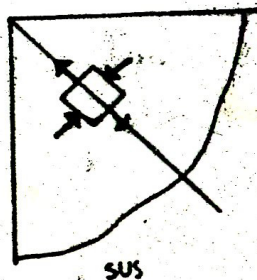
În centrul plăcii: $x = y = \frac{l}{2}$

$$M_x = \frac{(1+\mu)q_0 l^2}{48^2}; \quad M_{xy} = 0$$

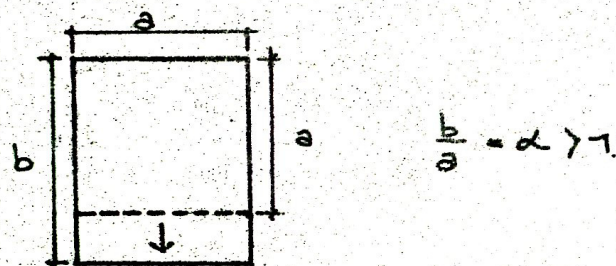
$$M^0 = M^{LD} = \frac{q_0 l^2}{48^2} = M_x^{max} = M_y^{max}$$



EFORTURI UNITARE ÎN COLTURI



CAZUL PLĂCII DREPTUNGHILARE



Starea de tensiune și deformare se modifică odată cu raportul deschiderilor $\frac{b}{a} = \alpha$

a. TRANSFERUL FORTELOR DUPA CELE DOUA DESCHIDERI FUNCTIE DE \alpha

Se determină forțele exterioare transportate după ox și oy prin integrarea forțelor tăietoare pe contur (C_x și C_y):

$$ox \rightarrow C_x = \frac{2q_0}{\pi a (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})} \int_0^b \sin \frac{\pi y}{b} dy = \frac{4q_0 b}{\pi^2 b (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})}$$

$$oy \rightarrow C_y = \frac{2q_0}{\pi b (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})} \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} dx = \frac{4q_0 a}{\pi^2 b (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})}$$

Ca verificare, suma ($C_x + C_y$) trebuie să echilibreze întreaga încărcare C :

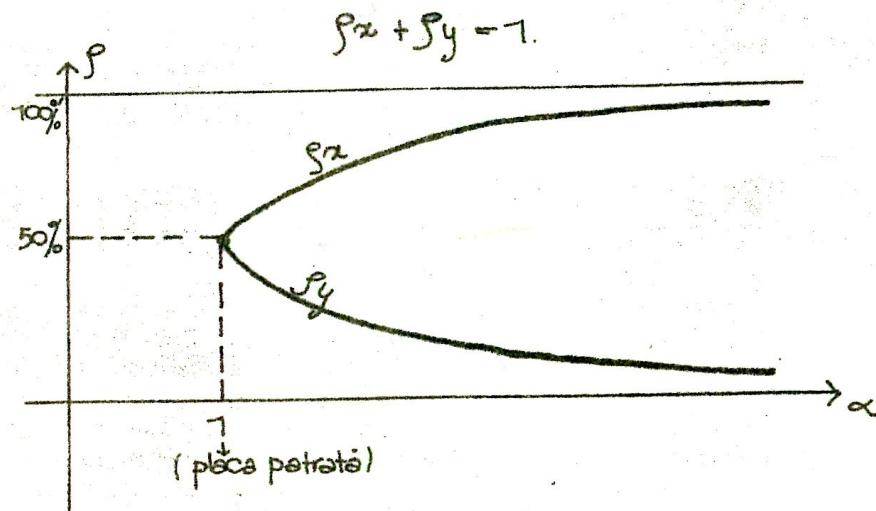
$$C_x + C_y = C$$

$$C = q_0 \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{\pi y}{b} dy = \frac{4}{\pi^2} (q_0 ab)$$

$$\frac{4q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \times \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) = \frac{4}{\pi^2} (q_0 ab)$$

$$\rho_x = \frac{C_x}{C} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{\alpha^2})} \quad \text{parametrul transportului forțelor după } Ox.$$

$$\rho_y = \frac{C_y}{C} = \frac{1}{(1 + \alpha^2)} \quad \text{parametrul transportului forțelor după } Oy.$$



Diagramele de mai sus arată că pe măsură ce crește α , transportul de forțe devine inegal și în favoarea deschiderii mici care este deschiderea hotărâtoare de lucru. Pentru $\alpha = 1$ transportul este egal (placa pătrată) pe ambele direcții iar pentru $\alpha = \infty$ toată sarcina se transportă după Ox (fașe infinite).

b. VARIATIA MOMENTELOR ÎNCOVĂIETOARE DIN CENTRUL PLACII

$$\rho_M = \frac{M_x^{max}}{M_y^{max}} = \frac{\alpha^2 + \mu}{\mu \alpha^2 + 1}$$

Facem $\mu = \frac{1}{6}$

$$\rho_M = \frac{6\alpha^2 + 1}{\alpha^2 + 6}$$

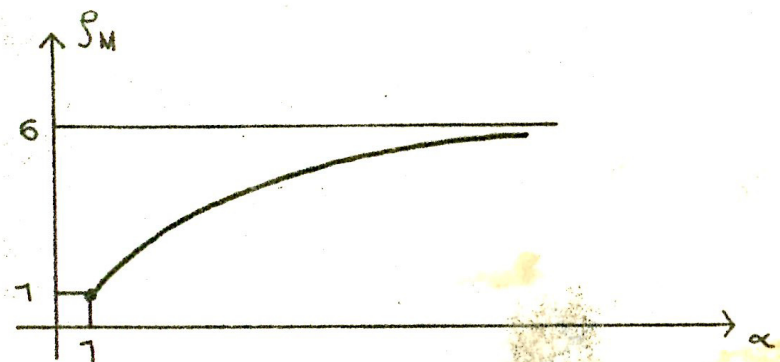


Diagrama $\int M$ obținută arată că momentul încovoitor după ox (α) crește rapid odată cu α . La limită pentru $\alpha = \infty$ acest moment tinde către o valoare M_y . Acest moment nu se anulează niciodată deși $Q_y \rightarrow 0$ și la limită este egal cu:

$$M_y = \mu M_x$$

Apariția acestui moment fără transport de forțe se explică prin faptul că deformările transversale din efectul lui Poisson nu sînt libere după axa oy .

c. VARIATIA MOMENTULUI DE RĂSUCIRE MAXIM ÎN FUNCȚIE DE α

$$M_{xy}^{max} = \frac{q_0(1-\mu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} = \frac{q_0(1-\mu)}{\pi^2} \times \frac{1}{a \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^2}$$

Cînd α tinde către ∞ momentul maxim din colț tinde către 0.

d. VARIATIA RIGIDITĂȚII

Modul cum variază rigiditatea plăcii în funcție de α poate fi apreciat făcînd raportul dintre deplasarea maximă a unei plăci dreptunghiulare și a unei plăci pătrate:

$$W_{max}^{\square} = \frac{q_0}{\pi^4 b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} = \frac{q_0 a^4}{\pi^4 b \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^2}$$

$$W_{max}^{\square} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 b}$$

$$\int W = \frac{W_{max}^{\square}}{W_{max}^{\square}} = \frac{4}{\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^2}$$

Se remarcă imediat că cea mai rigidă placă este cea pătrată ($\alpha = 1$).

Pentru $\alpha = \infty$ rigiditatea plăcii scade de patru ori.